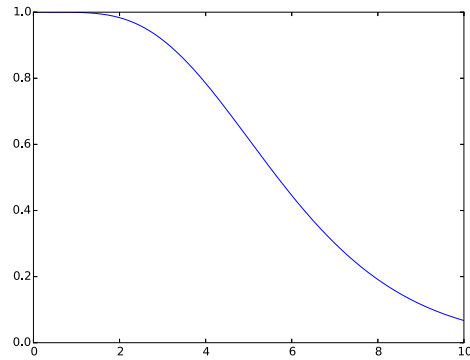


Soit pour tout n de $\mathbb{N}$, $F_n : x \mapsto e^{-x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)$ et λ réel fixé de $]0, 1[$.

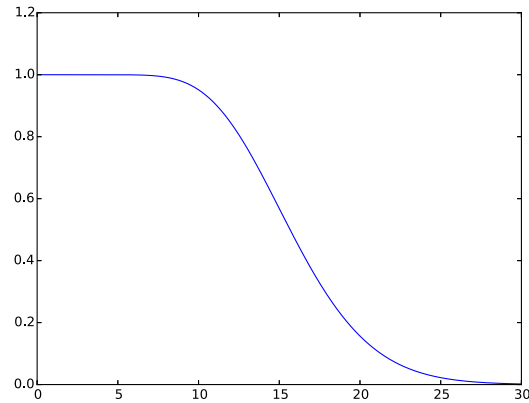
1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $F_n(x) = \lambda$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ notée a_n .
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
3. Avec **Python**. Définir la fonction F_n . Définir une procédure Trace de paramètre un entier n qui retourne le tracé de F_n sur le segment $[0, 2n]$. Que peut-on constater ?
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.
5. Définir une procédure $A(n, \lambda)$ qui retourne une valeur approchée de a_n avec une précision que l'on explicitera.
6. Tracer les points de coordonnées (n, a_n) pour n entier variant dans un intervalle raisonnable. Que constate-t-on ?
7. Donner une expression intégrale de $F_n(x)$. Montrer que pour tout réel $\alpha \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(n\alpha) = 1$. Étudier de même la suite $(F_n(n\alpha))$ pour $\alpha > 1$. Que peut-on en déduire pour a_n ?
8. Soit $A \in \mathbb{R}$. Montrer par utilisation judicieuse du théorème de convergence dominée appliquée à une intégrale bien choisie que la suite $(F_n(n + A\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. En déduire qu'il existe un réel A_0 tel que $a_n = n + A_0\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

Correction :

1. On vérifie facilement que la fonction F_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec pour tout $x \geq 0$, $F'_n(x) = -e^{-x} \frac{x^n}{n!}$. La fonction est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ avec de plus $F_n(0) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$. La fonction F_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $]0, 1[$. L'équation $F_n(x) = \lambda$ admet donc une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $\forall x \geq 0$, $F_{n+1}(x) = F_n(x) + e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > F_n(x)$.
En particulier $F_{n+1}(a_n) > F_n(a_n) = \lambda$. Comme F_{n+1} est strictement décroissante, $F_{n+1}(y) > \lambda \Leftrightarrow y < a_{n+1}$.
On obtient donc $a_n < a_{n+1}$.
3. Quelques tracés : Pour $n = 5$:



Pour $n = 15$:



On peut remarquer une phase initiale à décroissance lente, les valeurs restant proches de 1, puis une phase de décroissance rapide et ensuite des valeurs très proches de 0.

On montre facilement par calcul que la dérivée seconde s'annule en $x = n$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = n$. Le tracé de plusieurs courbes F_n semble suggérer que $F_n(n)$ est de l'ordre de 0.5.

4. Soit A un réel positif fixé. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} = e^A$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(A) = 1$.

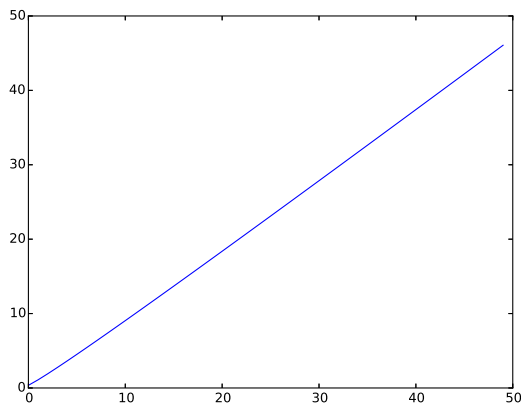
Il existe donc un entier N_0 tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow F_n(A) \geq \lambda$.

Mais les fonctions F_n sont décroissantes. Donc pour $n \geq N_0$, $A \leq a_n$ car $F_n(a_n) = \lambda$. En résumé :

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \exists N_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow a_n \geq A$$

On vient de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

5. Voir feuille travail Pyzo jointe. On utilise une méthode de dichotomie. On trouve par exemple pour $\lambda = 0,7$, $a_{10} = 9,04\dots$ et $a_{50} = 47,027\dots$
6. Un exemple



On peut conjecturer que $a_n = n + o(n)$, le terme complémentaire devant être précisé.