Sol. ex. pl. 17 : partie 1 : les exos sur les morphismes

Exercice 1 (Avec des compléments gratuits)**.**

a) Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{R},+)$ qui sont dérivables.

b) Sachant que $\exp : (\mathbb{R},+) \to (\mathbb{R}^{+*},\times)$ est un isomorphisme, sachant aussi que la composée de deux morphismes est un morphisme, déduire du a) la forme de *tous* les morphismes dérivables de $(\mathbb{R}^{+*},\times)$ dans $(\mathbb{R}^{+*},\times)$.

Solution 1 a) **C.N.** On considère $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)+f(y)$. On fixe $y\in\mathbb{R}$ et on dérive l'égalité par rapport à x. On a alors $f'(x+y) = f'(x)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Donc f' est constante sur $\mathbb{R}$. Donc en notant a cette constante, on sait alors qu'il existe un $b\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$. Comme f est un morphisme de groupe pour $+$ on sait aussi que $f(0) = f(0)+f(0)$ entraîne $f(0)=0$, donc $b=0$. On a forcément $f = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Réciproque : si $f = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ il est immédiat que f est bien un morphisme pour $+$.

Comme c'est Noël, voici plein de bonus sur le a)

Généralisation : on peut obtenir le même résultat avec l'hypothèse plus faible f *continue*, autrement dit montrer le :

Théorème 1 sur les morphismes additifs de $(\mathbb{R},+)$ (avec hyp. de continuité) – *Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
Alors f vérifie $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$ (on dit que f est un morphisme pour la loi $+$) si, et seulement si, il existe un $a\in\mathbb{R}$ tel que $f = a\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Comment prouver ce théorème ? Le père Noël propose deux méthodes :

(M1) pour démontrer le théorème 1 Cela va d'abord ressembler à l'ex. 2 fait en classe.

Théorème 2, théorème *algébrique* sur les morphismes additifs de $(\mathbb{R},+)$
Soit $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$, alors $f_{|\mathbb{Q}} = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$

N.B. – Ici il n'y a aucune hyp. de continuité.

Preuve rapide du théorème 2 – On commence par montrer que $f(0)=0$ puis qu'en posant $a=f(1)$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(n)=na$ par récurrence sur n.

On a aussi que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=-f(x)$, ce qui, avec ce qui précède donne que $f_{|\mathbb{Z}} = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

On a encore que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a=f(1)=f(n.\dfrac{1}{n}) = nf(\dfrac{1}{n})$ et donc que $f(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{a}{n}$.

Et enfin que $f(p/q) = pf(1/q) = p\dfrac{a}{q} = a\dfrac{p}{q}$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$.

On conclut que $f_{|\mathbb{Q}^+} = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^+}$ et par imparité que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$. □

Application du théorème 2 à la preuve du théorème 1 : pour un $x\in\mathbb{R}$ quelconque fixé, on considère une suite $(r_n)\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. Alors $f(r_n) = ar_n\quad(*)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et par continuité de f, $f(r_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Donc, via $(*)$, $f(x) = a\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = ax$. Ceci est vrai pour tout $x\in\ \mathbb{R}$.

Donc $f = a\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

La réciproque est immédiate et on a prouvé le théorème 1. □

On appellera cette méthode 1, une méthode « par densité » car pour dire que tout réel est limite d'une suite de rationnels, on dira que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$, cf. chap. E

(M2) pour montrer le théorème 1 On peut se ramener de l'hyp. continue à l'hyp. dérivable : autrement dit déduire le théorème 1 du résultat de l'ex. 1

Méthode pour passer de l'hyp. continue à l'hyp. dérivable : intégrer !

On considère maintenant $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant l'équation fonctionnelle du théorème 1. On va montrer qu'elle est dérivable, ce qui, via la version affaiblie ci-dessus, démontrera le théorème 1.

Or comme f est continue, on peut dans l'équation $f(x+y) = f(x) + f(y)$, considérer y fixé et intégrer par rapport à la variable x par exemple.

On a alors $\int_0^X f(x+y)dx = \int_0^X f(x)dx + \int_0^X f(y)dx = F(X) + Xf(y)$ pour tout $(X,y) \in \mathbb{R}^2$, en notant F la primitive de f qui s'annule en zéro.

Mais dans le membre de gauche, $\int_0^X f(x+y)dx = \int_y^{X+y} f(u)du = F(X+y) - F(y)$.

Donc $F(X+y) - F(y) = F(X) + Xf(y)$ pour tout $(X,y) \in \mathbb{R}^2$.

On fixe $X = 1$ par exemple. On a alors $f(y) = F(1+y) - F(y) - F(1)$.

Or F est une fonction $\mathcal{C}^1$, donc le membre de droite de la dernière égalité est l'expression d'une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. □

Retenir de cette méthode 2 : les équations fonctionnelles ont souvent un *effet régularisant* : dès qu'une solution a une petite propriété de régularité (ici la continuité), elle est automatiquement davantage régulière (ici $\mathcal{C}^\infty$). On peut mettre même de hyp. plus faibles ... comme dans le cadeau suivant :

Exokado : (un peu plus dur , hyp. de régularité plus faible) *Soit* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée sur un certain voisinage de zéro *(hyp. plus faible que la continuité).*

Alors f *vérifie* $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *(on dit que* f *est un morphisme pour la loi* + *) si, et seulement si, il existe un* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $f = a\ id_{\mathbb{R}}$.

Fin de l'excursion bonus père Noël sur ce a)

b) Soit Notons $\mathcal{M} = \{\ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}^{+*}), |\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ f(xy) = f(x).f(y)\}$ l'ensemble des morphismes multiplicatifs.

Notons $\mathcal{A} = \{f\ \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ |\forall\,(x,y) \in (\mathbb{R})^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)\}$ l'ensemble des morphismes additifs.

D'après le a), on sait que $\mathcal{A} = \{a\,\mathrm{id},\ a \in \mathbb{R}\}$.

Or *et voilà l'idée*

$$\boxed{f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \ln\circ f \circ \exp \in \mathcal{A}.}$$

N.B. Bien noter que ceci est une *équivalence* : le sens inverse s'écrit aussi $g \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \exp\circ g \circ \ln \in \mathcal{M}$.

Donc $f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{A},\ g = \ln\circ f \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{A},\ f = \exp\circ g\circ \ln$.

Donc $f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists\ \ a \in \mathbb{R},\ f = \exp\circ a \ln$

Donc $f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \exp(a\ln(x))$.

Finalement $f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = x^a$.

Ainsi l'ensemble $\mathcal{M}$ cherché est exactement celui des fonctions puissances.

Cette méthode illustre l'efficacité des (iso)-morphismes pour *transformer* un problème en un autre qu'on sait résoudre

.

Remarque : on peut aussi bien sûr trouver la solution du b) directement en dérivant comme au a).

Exercice 2. Montrer que si $(\mathbb{K},+,\times)$ est un corps contenant $\mathbb{Q}$ comme sous-corps et si $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est un morphisme de corps alors $f_{|\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$.

Solution 2 • Un morphisme de corps f envoie toujours 0 sur 0 car c'est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K},+)$ dans lui-même et 1 et sur 1 (prop. des morphismes d'anneaux ou encore morphisme de groupe de $(\mathbb{K}^*,\times)$ dans lui-même).

• Ensuite on déduit de $f(1) = 1$ que $f(1+1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2$ et on montre par réc. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ (1)

Comme f est un morphisme de groupes pour $+$, on sait aussi que pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(-x) = -f(x)$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(-n) = -f(n) = -n$ (cf. (1))

Ainsi on sait déjà que $f_{|\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ (2).

- Comme $f_{|K^*}$ est un morphisme de groupes pour $\times$, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $f(1/x) = 1/f(x)$.

Ainsi pour $x \in \mathbb{Z}^*$, $f(1/x) = 1/f(x) = 1/x$ (3), la dernière égalité étant vraie par (2).

- Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. On l'écrit $x = p/q$ avec $(p,q) \in (\mathbb{Z}^*)^2$, et comme f est un morphisme multiplicatif, $f(p/q) = f(p).f(1/q) = p/q$ cf. (2) et (3) : on conclut que $f(x) = p/q = x$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ et $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 3. Montrer que les seuls morphismes de corps de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est l'identité sont l'identité et la conjugaison. *Indication* – Si f est un tel morphisme, que dire de $f(i)$?

Solution 3 Remarque : on sait déjà que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et la conjugaison sont des morphismes de corps de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dont la restriction à $\mathbb{R}$ est bien l'identité. Il s'agit ici de montrer que ce sont les seuls.

Soit donc $f : (\mathbb{C}, +, \times) \to (\mathbb{C}, +, \times)$ un morphisme de corps dont la restriction à $\mathbb{R}$ est l'identité.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Il s'écrit $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $f(z) = f(a) + f(i)f(b)$ puisque f est un morphisme pour les deux lois. Comme a et b sont dans $\mathbb{R}$, $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Donc $f(z) = a + f(i)b$.

Ainsi l'application f est entièrement déterminée si on connait $f(i)$: on aimerait montrer que $f(i) = \pm i$, pourquoi est-ce le cas ?

L'idée est de se demander ce qu'est i (et son frère jumeau $-i$ qui porte son « − » comme un masque de fer) ? Ce sont les deux nombres complexes dont le carré vaut -1 !

Comme $i^2 = -1$ on sait que $f(i^2) = f(-1) = -1$.

Mais comme f est un morphisme multiplicatif $f(i^2) = f(i)^2$. Donc on vient de montrer que $f(i)^2 = -1$.

Or, on a dit que i et $-i$ sont les deux seules racines carrées de -1 dans $\mathbb{C}$.Donc $f(i) = \pm i$.

- Si $f(i) = i$, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a+ib) = a + ib$ donc $f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.
- Si $f(i) = -i$ alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a-ib) = a - ib$ donc f est la conjugaison.