

Rédaction de solutions d'ex. pl 13

Exercice 1.

- a) On admet (cf. autre exercice) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ où ε est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
En déduire un équivalent de $\text{ch}(x) - 1$ quand $x \rightarrow 0$.
- b) On note $\varphi(x) = x(1 - \text{th}^2(x)) - \text{th}(x)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \leq 0$.
- c) Déterminer les réels a tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) \leq \exp(ax^2)$.

Solution 1 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) - 1 = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 = \frac{(e^x - 1) + (e^{-x} - 1)}{2}$.

Or $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $e^{-x} - 1 = -x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(-x)$.

Donc $\text{ch}(x) - 1 = \frac{1}{2}(x^2/2 + x^2/2) + \frac{x^2}{2}(\varepsilon(x) + \varepsilon(-x))$.

Donc $\text{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\eta(x)$ où $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Autrement dit $\text{ch}(x) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2/2)$ donc $\boxed{\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}}$.

N.B. Rédaction sans $o()$ pour ceux qui ont encore peur des $o()$, savoir faire aussi la rédaction avec les $o()$ faite en classe. L'expression $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ s'appelle un développement limité à l'ordre 2 de $\exp$ en 0.

b) On pose donc $\varphi(x) = x(1 - \text{th}^2(x)) - \text{th}(x) = \frac{x}{\text{ch}^2(x)} - \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{x - \text{sh}(x)\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)}$.

Or $\text{sh}(x)\text{ch}(x) = \frac{1}{2}\text{sh}(2x)$ et donc $\varphi(x) = \frac{2x - \text{sh}(2x)}{2\text{ch}^2(x)}$.

Par convexité du sh sur $\mathbb{R}^+$, on sait que pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $\text{sh}(u) \geq u$ (comparaison avec la tangente au graphe de sh en 0).

Donc pour tout $x \geq 0$, $\varphi(x) \leq 0$

c) On commence par isoler a dans cette expression : $\text{ch}(x) \leq e^{ax^2} \Leftrightarrow \ln(\text{ch}(x)) \leq ax^2$ par stricte croissance du $\ln$.

Pour $x = 0$ cette inégalité est toujours vérifiée donc on cherche en fait l'ensemble des $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $a \geq \frac{\ln(\text{ch}(x))}{x^2}$.

On étudie donc la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\ln(\text{ch}(x))}{x^2}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Cette fonction est paire, donc on va l'étudier seulement sur $]0, +\infty[$.

On calcule $f'(x) = \frac{\text{th}(x)x^2 - 2x\ln(\text{ch}(x))}{x^4} = \frac{x\text{th}(x) - 2\ln(\text{ch}(x))}{x^3}$.

On note $\text{num}(x) = x\text{th}(x) - 2\ln(\text{ch}(x))$.

Comme le $\ln(\text{ch}(x))$ est isolé, on va l'éliminer en dérivant !

On calcule $\text{num}'(x) = \text{th}(x) + x(1 - \text{th}^2(x)) - 2\text{th}(x) = x(1 - \text{th}^2(x)) - \text{th}(x)$.

Ah on tombe sur la question du b) qui était là pour ne pas se décourager ... dériver toujours dériver ...

On sait donc maintenant par b) que num est décroissant sur $\mathbb{R}^+$, et comme $\text{num}(0) = 0$, on sait que num est négative sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi $f' \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^{++}$.

On veut majorer f pour tout $x \in \mathbb{R}^{++}$ donc on cherche $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Or comme $\text{ch}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a $\ln(\text{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{ch}(x) - 1$ et donc $\ln(\text{ch}(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$. Ainsi f se prolonge par continuité en 0 et $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1/2$ (par imparité).

Ainsi le a cherché vaut $1/2$.

Exercice 3. Trouver une relation simple entre $\text{Arctan}(\text{sh}(x))$ et $\text{Arctan}(e^x)$.

Solution 3 Idée : dériver !

Soit $g(x) = \arctan(e^x)$. Alors $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $h(x) = \arctan(\text{sh}(x))$. Alors $h'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)}$.

Or $1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x)$ donc $h'(x) = \frac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$.

Ainsi, on conclut que $h'(x) = 2g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\arctan(e^x) = \arctan(\text{sh}(x)) + C$.

Or $g(0) = \arctan(1) = \pi/4$ et $h(0) = \arctan(0) = 0$. Donc $2\arctan(1) = 0 + C$ donc $C = \pi/2$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\arctan(e^x) = \arctan(\text{sh}(x)) + \pi/2$.

Question supplémentaire : il y a-t-il une raison « plus profonde » qui permettrait de comprendre cette formule ?

Propriété (formule d'addition des arctan (H.P.)) pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ab \neq 1$,
 $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k$ où $k \in \{-\pi, 0, \pi\}$ et plus précisément :
 $k = 0$ ssi le point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est entre les deux branches de l'hyperbole d'équation $ab = 1$,
 $k = \pi$ si (a, b) est au-dessus de cette hyperbole, et $ab = -1$ s'il est en dessous.

Preuve de la prop. un bon exercice !

Application ici : avec $a = e^x$ et $b = -e^{-x}$ on a $\frac{a+b}{1-ab} = \text{sh}(x)$ et comme $a > 0$ et $b < 0$, le point (a, b) est bien entre les deux branches de l'hyperbole, donc

$$\arctan(e^x) + \arctan(-e^{-x}) = \arctan(\text{sh}(x)) \quad (1)$$

Comme $\arctan$ est impaire, $\arctan(-e^{-x}) = -\arctan(e^{-x})$ et comme on sait aussi que pour $x > 0$, $\arctan(1/x) = \pi/2 - \arctan(x)$, on a $\arctan(e^{-x}) = \frac{\pi}{2} - \arctan(e^x)$.

Ainsi $\arctan(e^x) - \arctan(e^{-x}) = 2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}$. Avec cette relation dans (1), on obtient bien la même conclusion :

$$2\arctan(e^x) = \arctan(\text{sh}(x)) + \pi/2.$$

Exercice 4. Résoudre $y'' - y = -6\cos(x) + 2x\sin(x)$.

Solution 4 E.C. $r^2 - 1 = 0$ Sol. SSM $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-x}$.

Recherche d'une solution particulière :

(M1) Par superposition des sol. on le fait pour les deux équations.

(E₁) $y'' - y = -6\cos(x)$ et (E₂) $y'' - y = 2x\sin(x)$.

Pour (E₁) : on trouve la solution particulière $y_1 : x \mapsto 3\cos(x)$.

Remarque : a priori on doit chercher une solution $y_1 : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ mais ici comme le S.M. est pair et que $y'' - y$ a la parité de y , il suffit de chercher une solution en $a\cos(x)$ ce qui donne immédiatement la solution.

Pour (E₂) en fait, si on le fait sans passer dans $\mathbb{C}$, on doit chercher une sol. particulière y_2 de la forme : $y_2(x) = (ax + b)\cos(x) + (cx + d)\sin(x)$.

La encore la remarque de parité nous dit qu'il suffit ici (car $x \mapsto x\sin(x)$ est paire) de chercher y_2 de la forme $y_2(x) = b\cos(x) + cx\sin(x)$.

On trouve alors $y_2(x) = -x\sin(x) - \cos(x)$.

(M2) En fait, comme on a vu que pour (E₂) on devait chercher des solutions en $(ax+b)\cos(x) + (cx+d)\sin(x)$ autant le faire directement pour (E) avec le second membre complet. Autrement dit pour le S.M. $-6\cos(x) + 2x\sin(x)$, on cherche une solution paire ici donc $y_p(x) = b\cos(x) + cx\sin(x)$.

A faire aussi : faire la recherche d'une solution particulière de $(E_{2,\mathbb{C}})$ en considérant le second membre complexe $2xe^{ix}$ puis en simplifiant l'exponentielle e^{ix} . Grand avantage : pas besoin de se prendre la tête sur la forme a priori des solutions.