

Exercice 3. a) Enoncer et démontrer la formule de Leibniz pour la dérivée n -ième d'un produit de deux fonctions.

b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x^2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n , dont on précisera le degré, telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

N.B. – On ne cherchera pas ici à expliciter P_n .

c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, et tout $x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$.

Solution 3 a) QdC.

b) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : il existe une fonction polynomiale P_n , de degré n , telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$.

Montrons par récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $\mathcal{P}(0)$ est vraie, en prenant $P_0 = 1$, de degré zéro.

• H.R. on suppose que pour un $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie. On a donc $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors $f^{(n+1)}(x) = (P'_n(x) - 2xP_n(x))e^{-x^2}$.

On pose $P_{n+1}(x) = P'_n(x) - 2xP_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a bien P_{n+1} polynôme de degré exactement $n+1$ car $x \mapsto xP_n(x)$ définit un polynôme de degré exactement $n+1$ et P'_n étant de degré $n-1$ la somme $P'_n(x) - 2xP_n(x)$ est de degré exactement $n+1$. On conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

La récurrence est établie.

c) On a la relation $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (-2x)f(x)$. Si on dérive cette relation à l'ordre n avec la formule de Leibniz, on a :

$$f^{(n+1)}(x) = (-2x)f^{(n)}(x) + n(-2)f^{(n-1)}(x).$$

Ce qui donne exactement $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Exercice 4 (Le cas exemplaire de l'inégalité arithmético-géométrique). Montrer pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$ l'inégalité suivante : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ de trois façons différentes :

(i) Par calcul algébrique avec une série d'équivalences.

(ii) En fixant une variable et dérivant par rapport à l'autre.

(iii) Par concavité du $\ln$.

Remarque : Vérifiez aussi que si par exemple $b \leq a$, on a $b \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq a$.

Solution 4 L'I.A.G. est à connaître comme du cours :

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ (S.R.d.G.) alors } a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.}$$

Les trois méthodes proposées pour démontrer l'I.A.G.

Remarque préliminaire : dans toutes les méthodes où on part de la propriété à démontrer pour arriver à quelque chose de vrai, la démonstration n'est valide *que* si on a procédé rigoureusement par *équivalence*, partout.

• **(M1) La méthode « algébrique » :** manipulations algébriques simples (passage au carré, développement, identités remarquables).

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2$. On note (IAG) l'inégalité : $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ à démontrer.

Comme il s'agit d'une inég. entre nombres *positifs* : (IAG) $\Leftrightarrow ab \leq (a+b)^2/4$ (passage au carré).

Donc (IAG) $\Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 \leq a^2 + b^2 - 2ab \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2$ ce qui est vrai. Donc (IAG) est vraie. $\square$

Remarque : On peut retenir aussi de cette preuve l'intéressante inégalité :

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, 2ab \leq a^2 + b^2}$$

• **(M2) La méthode d'analyse par étude de la fonction différence :** (connue au lycée déjà) pour montrer que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, on étudie les variations de $\varphi :: x \mapsto g(x) - f(x)$ sur I . On trouve le min. de φ et on montre qu'il est positif.

S'il y a deux variables : on en fixe l'une et on étudie la fonction p.r. à l'autre variable.

Ici : soit $b > 0$ fixé. Soit $\varphi : a \in \mathbb{R}^{++} \mapsto \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$.

Alors $\forall a > 0$, $\varphi'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$. Donc $\varphi'(a) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \geq 0 \Leftrightarrow b \leq a$

Donc φ est décroissante sur $]0, b]$ et croissante sur $[b, +\infty[$ et donc admet un min. global en b . On calcule $\varphi(b) = b - b = 0$. Donc $\varphi \geq 0$ sur $]0, +\infty[$ ce qui démontre (IAG). $\square$

• **(M3) En voyant l'I.A.G. comme une inégalité de convexité/concavité, ici du $\ln$:**

Remarque préliminaire : par déf. une fonction f est *concave sur I* si, et seulement si, pour tout $(a, b) \in I^2$ et tout $t \in [0, 1]$, $f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b)$. En particulier pour $t = 1/2$, l'inégalité de concavité donne :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.

Comme $\ln$ est *strictement croissante*, $(\text{IAG}) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{ab}) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Par prop. algébrique du $\ln$, on a donc : $(\text{IAG}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$, inégalité *vraie* car $\ln$ est concave. Donc (IAG) est vraie. $\square$

Culturel : sur la moyenne géométrique Elle sert à faire la moyenne de croissances « multiplicatives ». Par exemple si le chiffre d'affaire d'une entreprise est multiplié la première année d'un facteur c_1 puis la deuxième année d'un facteur c_2 , alors en moyenne par an, il est multiplié du facteur $\sqrt{c_1 c_2}$.

Tous les ex. de la pl. sur les inég. se traitent par une des trois méthodes précédentes.