D.M. 4 avec solution et commentaires de correction

Etudier $f : x \mapsto f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|-x^2+4|}$: ensemble de définition, variations, limites aux bornes, étude d'éventuels prolongements par continuité et dérivabilité en ces éventuels prolongements, asymptotes éventuelles.

Méthode : (à comparer avec la déf. des asymptotes donnée en cours). Pour trouver les éventuelles droites $D : y = ax + b$ asymptotes, on raisonnera comme suit : si Γ_f a une telle asymptote en $\pm\infty$ alors $f(x)/x \underset{x\to\pm}{\longrightarrow} a$ (pourquoi ?). On trouve ainsi les a candidats et on étudie ensuite la limite de $f(x) - ax$ quand $x \to \pm\infty$.

Solution

a) Ensemble de définition :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Par théorème généraux d'opérations, f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 2\}$.

Plus en Détail : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la composée $\varphi : x \mapsto \sqrt{|-x^2+4|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}$ par multiplication de cette fonction φ par une constante et ajout de $x \mapsto 3/5x$

De même la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc $x \mapsto \sqrt{|-x^2+4|}$ est dérivable en tout point x tel que $-x^2+4 \neq 0$ donc sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 2\}$. On en déduit la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 2\}$ par multiplication de cette fonction φ par une constante et ajout de $x \mapsto 3/5x$

Ne dites pas : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{-2, 2\}$ « parce que la fonction $x \mapsto |x|$ (ou $x \mapsto \sqrt{x}$) n'est pas dérivable en 0 », mais dites « parce que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ (resp. $\mathbb{R}^{+*}$) » ! Ne pas justifier la dérivabilité par la non-dérivabilité !

b) Pas de parité ni de périodicité.

c) Etude des variations :

• Pour $x > 2$ ou $x < -2$, $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4}$ et $f'(x) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{4x + 3\sqrt{x^2-4}}{5\sqrt{x^2-4}}$.

Il est clair que $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 2$.

Pour $x < -2$, on considère l'expression conjuguée :

$$f'(x) = \frac{16x^2 - 9(x^2-4)}{5\sqrt{x^2-4}(4x - 3\sqrt{x^2-4})} = \frac{7x^2+36}{5\sqrt{x^2-4}(4x - 3\sqrt{x^2-4})} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, -2]$ et strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

• Pour $x \in]-2, 2[$, $f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{4-x^2}$. Alors $f'(x) = \frac{3\sqrt{4-x^2} - 4x}{5\sqrt{4-x^2}}$.

Pour $x \in]-2, 0]$, $f'(x) \geq 0$ clairement.

Pour $x \in [0, 2[$, même méthode d'expression conjuguée :

$f'(x) = \frac{9(4-x^2) - 16x^2}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2}+4x)} = \frac{36 - 25x^2}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2}+4x)} = \frac{(6-5x)(6+5x)}{5\sqrt{4-x^2}(3\sqrt{4-x^2}+4x)}$

Donc f' est positive sur $]0, \frac{6}{5}[$ et négative sur $]\frac{6}{5}, 2[$.

On obtient le tableau de variation, en mettant déjà les limites cf d).

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad 0 \quad \frac{6}{5} \quad 2 \quad +\infty$
f'	$-$ $\quad \| + \quad \frac{3}{5} + \quad 0 - \quad \| \quad +$
f	$+\infty \searrow -\frac{6}{5} \nearrow \frac{8}{5} \nearrow 2 \searrow \frac{6}{5} \nearrow +\infty$

Soignez les études de signes et autres manip. d'inégalités : pour ceux et celles qui ont étudié le signe de $f'(x)$ en remplaçant l'inégalité $f'(x) \geq 0$ par des inégalités équivalentes, en mettant au carré quand il faut, attention aux conditions pour mettre au carré en gardant l'équivalence !

Exemple de rédaction avec cette seconde méthode :
Pour $x \in]-2,2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} - \frac{4x}{5\sqrt{4-x^2}} \geq 0, \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5} \geq \frac{4x}{5\sqrt{4-x^2}}, \\ & \Leftrightarrow \quad 3\sqrt{4-x^2} \geq 4x \quad (*) \end{aligned}$$

Là, on a envie de passer aux carrés : on fait une pause pour réfléchir !

1er cas : $x \leq 0$ donc ici $x \in]-2,0]$. Dans ce cas $(*)$ est toujours vraie donc $f'(x) \geq 0$.

2ème cas : $x \geq 0$. Dans ce cas $(*)$ est équivalente à l'inégalité qu'on obtient en passant au carré. Ainsi dans ce deuxième cas :

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \quad & \Leftrightarrow \quad 9(4-x^2) \geq 16x^2 \\ & \Leftrightarrow \quad 36 \geq 25x^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{36}{25} \geq x^2 \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5} \geq x \quad \text{car } x \geq 0. \end{aligned}$$

Donc pour $x \in [0,2[$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \frac{6}{5}]$.

Quel intérêt, en D.M., de « faire les variations à la calculatrice » i.e. sans rien comprendre, et de vendre le signe par un argument bidon ? Essentielle pour la suite de vos études scientifiques est l'honnêteté intellectuelle !

d) Etude des limites :
- En $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ comme somme de deux fonctions tendant vers $+\infty$.
- En $-\infty$: on a une forme indéterminée $-\infty + \infty$

Mais pour tout $x \in]-\infty, -2[$:

$f(x) = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2-4} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = x[\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}]$.

Quand $x \to -\infty$ le dernier crochet tend vers $-\frac{1}{5}$, donc $f(x) \to +\infty$.

e) Etude de l'existence d'une asymptote en $+\infty$.

(i) **Rappel de déf. (donné en cours et pourtant en D.M. certains ont mis une déf. bidon !)** La droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$ si, et seulement si, par déf. $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Lemme (suivant l'énoncé) C.N. pour que Γ_f ait une droite asymptote en $+\infty$, donnant le coeff. dir. candidat

Si Γ_f a une asymptote D d'équation $y = ax + b$ *alors* $\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

Preuve du lemme : Que peut-on utiliser d'autre que la déf. ci-dessus !?! On suppose que $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit (pas de F.I.) que $\frac{f(x)-(ax+b)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Autrement dit que $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme $\frac{b}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par somme de limites que $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} + \frac{b}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ c'est-à-dire que $\frac{f(x)}{x} - a \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. $\square$

Application ici :

On se place pour $x \geq 2$.

Alors $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\sqrt{1 - \dfrac{4}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{7}{5}$.

On vient de trouver le a candidat : ensuite on va étudier $f(x) - ax$. Si cette différence a une limite finie b, alors *d'après la* **définition** *ci-dessus*, la droite d'équation $y = ax + b$ sera asymptote.

On étudie alors $f(x) - \dfrac{7}{5}x = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{x^2-4} = \dfrac{4}{5}\,\dfrac{(x^2-4)-x^2}{\sqrt{x^2-4}+x} = \dfrac{-16}{5(\sqrt{x^2-4}+x)}$.

Donc $f(x) - \dfrac{7}{5}x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci signifie que la droite D d'équation $y = \dfrac{7}{5}x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$.

f) Etude de l'existence d'une asymptote en $-\infty$: par la même méthode, on obtient que la droite D' d'équation $y = -\dfrac{1}{5}x$ est asymptote au graphe de f en $-\infty$.

Attention à ceux qui écrivent $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{7}{5}x$. Cela n'a AUCUN SENS ! TRES GROSSE FAUTE

Quand $x \to +\infty$, il n'y a plus de x dans la limite ! On a donné le x à « ça tend » et satan ne vous le rendra pas !

g) Etude au point particulier d'abscisse $x = 2$.

Il est inutile, comme je l'ai souvent vu, d'étudier les limites de f en 2 et en -2. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ par théorèmes généraux !

On étudie seulement le problème de la dérivabilité.

- pour $h > 0$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{4+h}{h}} \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
- pour $h < 0$ $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{|4+h|}{-h}} \underset{h\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$.

La courbe présente au point $(2, \dfrac{6}{5})$ deux demi-tangentes verticales opposées : on a un *point de rebroussement*.

h) Etude au point d'abscisse $x = -2$. Analogue : $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} \underset{h\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$ et même conclusion.

On pouvait aussi utiliser le théorème de la limite de la dérivée (variante où la limite est infinie), en citant les hypothèses de ce théorème ! Certains ont bien dit aussi que comme les deux limites étaient différentes on avait un « point anguleux ». Ici les deux demi tangentes étant opposées, elles sont portées par la même droite, on parlera de point de rebroussement (point anguleux d'angle π si on veut) : un point matériel qui suivrait la courbe devrait s'arrêter pour « repartir en sens inverse ».