TP S2 : équations différentielles de la mécanique, avec Scilab

1 Vitesse de chute avec différents frottements fluides

On considère une chute le long de l'axe (Oz) avec un frottement fluide.

Le but est de comparer les tracés des fonctions $t \mapsto v(t)$ pour des frottements de la forme $k.v$, $k.v^2$ et $k.v^3$, ce qu'on notera $k.v^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3$.

La R.F.D. donne alors en orientant l'axe (Oz) vers le bas et en notant $v(t) = z'(t)$:

$$mv'(t) = -kv(t)^\alpha + mg,$$

ce qu'on simplifiera en :

$$v'(t) = -\lambda v(t)^\alpha + g.$$

Travail à faire : à l'aide de `ode`, tracez le graphe de $t \mapsto v(t)$ pour la C.I. $v(0) = 0$ pour les trois valeurs de α proposées.

2 Etude d'un tir balistique avec différents frottements fluides

Remarque : *En 1814 comme en 1914, les polytechniciens sont des artilleurs.*

Un canon tire un obus avec une vitesse de norme v_0 et un angle α. Le vecteur vitesse initiale est donc de la forme $\vec{v}(0) = v_0(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_z})$ (axe $\vec{e_z}$ vertical vers le haut).

Durant sa trajectoire l'obus n'est soumis qu'à son poids et à une force de frottement fluide : on va considérer différents modèles pour ce frottement.

2.1 Le cas où il n'y a pas de frottement du tout : les paraboles et la parabole de sécurité

La relation fondamentale de la dynamique donne $m\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\vec{g}$ s'intègre directement.

On note $\vec{v}(0) = v_0(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_z})$ et bien sûr : $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ (axe $\vec{e_z}$ vertical vers le haut).

En projection sur les axes, la R.F.D. équivaut à $\begin{cases} x''(t) = 0, \\ z''(t) = -g \end{cases}$.

On prend $M(0) = (0, 0) = O$ dans le plan $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$. On prend $g = 9.81 m.s^{-2}$.

a) Donnez l'expression explicite des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto z(t)$ avec ces C.I.

b) Tracer en SciLab, une famille de courbes correspondant aux différentes trajectoires obtenues avec un angle de tir fixé $\alpha = 30^o$, en faisant varier la norme v_0 entre 1000 et 1500 $m.s^{-1}$ avec un pas de 100.

c) On fixe au contraire maintenant $v_0 = 1000 m.s^{-1}$. Tracer une famille de courbes C_α correspondant aux trajectoires obtenues pour différents angles de tir α.

Un problème déjà étudié par E. Torricelli (*De motu projectorum 1644*) et repris par J. Bernoulli que l'a résolu à la fin du XVIIème siècle, est de déterminer la courbe *de sécurité* pour cette dernière famille de paraboles : celle qui nous mettrait à l'abris des tirs.

d) **Une première idée : regarder les points de hauteur maximale sur les paraboles.**
Pour chacune des courbes C_α tracées, rajouter un point rouge M_α correspondant au point de hauteur maximale de C_α. Observez la courbe formée par les M_α. Convient-elle comme courbe de sécurité ?

e) **Une meilleure idée :** *raisonner en sens inverse.*

i) Justifier d'abord qu'une trajectoire C_α peut aussi s'écrire comme le graphe Γ_a d'une fonction :
$$z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2(1+a^2) + ax; \text{ en ayant posé } a = \tan(\alpha),$$
le nombre $a = \tan(\alpha)$ a un sens clair : c'est la pente du vecteur $\vec{v}(0)$.

ii) Prenons un point $M = (x_0, z_0)$ du plan. La C.N.S. sur (x_0, z_0) pour qu'il existe un a tel que (x_0, z_0) soit sur une courbe Γ_a est que le discriminant Δ de l'équation du second degré :
$$a^2(-\frac{g}{2v_0^2})x_0^2 + ax_0 - \frac{g}{2v_0^2}x_0^2 - z_0 = 0,$$
vérifie $\Delta \geq 0$.
Les points (x_0, z_0) tels que $\Delta = 0$ correspondent à la courbe de sécurité cherchée (bord du domaine où $\Delta \geq 0$). Les formules se simplifient : on peut faire tracer la courbe de sécurité à SciLab.

2.2 Le cas d'un frottement proportionnel au vecteur vitesse

C'est encore un cas que l'on sait résoudre de manière « exacte » :
La relation fondamentale de la dynamique donne $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v}$ qu'on réécrit :
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g},$$
où τ est donc homogène à un temps.
Données numériques : $g = 9.81 m.s^{-2}$ et $k = 0.1 N.s.m^{-1}$ et $m = 140 kg$.
On note $\vec{v}(0) = v_0(\cos(\alpha)\vec{e_x} + \sin(\alpha)\vec{e_z})$ et bien sûr : $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ (axe $\vec{e_z}$ vertical vers le haut).
Alors l'équation différentielle projetée sur les deux axes donne :
$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{\tau} = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = -g \quad (2)$$
On sait bien sûr résoudre (1) et (2) et en déduire $x(t)$ et $z(t)$ par intégration.
En effet (1) $\Leftrightarrow v_x(t) = v_x(0)e^{-t/\tau}$ et (2) $\Leftrightarrow v_z(t) = (v_z(0) + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau$.
De même qu'au § 2.1 :

a) Tracer les trajectoires correspondants d'abord à $\alpha = 30^o$ et différentes valeurs de v_0.
b) Tracer les trajectoires correspondants à $v_0 = 1000\, m.s^{-1}$ et différentes valeurs de α.

2.3 Là où on a besoin de `ode` : frottements fluides plus élevés

On suppose maintenant que la force de frottement est proportionnelle à v^2 (on tire à partir d'un sous-marin !)
La R.F.D. s'écrit maintenant : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - kv.\vec{v}$ où $v = ||\vec{v}||$, qu'on réécrit :
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \lambda v\vec{v} = \vec{g},$$
Les équations différentielles deviennent beaucoup plus compliquées :
$$(S) \begin{cases} x''(t) + \lambda\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}x'(t) = 0, \\ z''(t) + \lambda\sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2}z'(t) = -g. \end{cases}$$
On peut néanmoins les résoudre numériquement avec SciLab
Pour cela, on crée un vecteur vertical $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \\ x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
On définit une fonction $(t, X) \in \mathbb{R} \times M_{4,1}(\mathbb{R}) \mapsto F(t, X) \in M_{4,1}(\mathbb{R})$ (qui en fait ne dépend pas de t ici mais, cf. cours, c'est une contrainte de SciLab), telle que $X'(t) = F(t, X(t))$.

a) Déterminer la fonction F en question.
b) Résoudre alors le système (S) ci-dessus avec `ode`.
c) En déduire le tracé de la courbe paramétrée $t \mapsto (x(t), z(t))$ et tracer sur la même figure la solution de l'équation avec frottement fluide du § 2.2 précédent avec la constante $\tau = 1$ et les mêmes C.I. $v_0 = 1$ et $\alpha = \pi/6$.

3 Oscillateurs

3.1 Comparaison pendule simple, Oscillateur harmonique

Pour l'équation du pendule simple $\theta''(t) + \omega_0^2 \sin(\theta(t)) = 0$ calculer les solutions pour la C.I. $\theta(0) = 1$, $\theta'(0) = 0$ (pendule lâché sans vitesse initiale).

On sait que $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$. On prend $g = 9.81 m.s^{-2}$ et $l = 0.5m$.

Tracer la courbe solution, et sur un même dessin, la courbe solution de l'O.H. avec la même C.I. pour un temps de 0 à 10.

Moralité : L'amplitude $\theta(0) = 1$ radians, ne peut pas être considérée bien longtemps comme un *petit mouvement*! Réessayer avec une amplitude plus petite.

3.2 Portrait de phase :

3.2.1 Pour l'oscillateur harmonique : exemple du cours

Question : Comment obtenir en SciLab un tracé simultané pour différentes conditions initiales ?

On pourra par exemple garder une vitesse initiale nulle et faire varier l'amplitude initiale.

3.2.2 Pour le pendule simple

A l'aide de ce qui précède, tracer aussi le portrait de phase du pendule simple avec les données numériques ci-dessus. On choisira comme C.I. cette fois $\theta(0) = 0$ et on faire varier $\theta'(0)$ entre 1 et $13 m.s^{-1}$: voir sur le graphique à partir de quelle valeur de $\theta'(0)$ quitte-t-on le comportement oscillant ? Comment retrouver cette valeur par un calcul ?

3.2.3 Pour le pendule simple amorti

On rajoute à l'E.D. un terme en $a\theta'(t)$. On prend par exemple $a = 1$. Tracer une nouvelle fois le portrait de phase avec les mêmes C.I. au 3.2.2