TP S1 : Introduction à Scilab et applications aux tracés

1 Tracés de graphes de fonctions, recherches de zéros

a) Tracez le graphe de la fonction tan sur $]-\pi/2, 5\pi/2[$.
Remarque : SciLab va joindre les points à travers les discontinuités, comment éviter ce phénomène ?

b) Recadrez les axes pour éviter que l'axe des ordonnées ne monte trop haut. Raffinez si nécessaire le nombre de points pris...
Boîte à outils :
- Essayer d'utiliser le Zoom de la fenêtre. Essayez aussi le menu Edition de la fenêtre graphique, vous devrez aussi pouvoir mettre les axes au centre.
- En ligne de commande : la commande `zoom_rect([xmin,y min,xmax,ymax])` permet de définir précisément la fenêtre d'affichage. Un autre avantage est que sinon, on doit recommencer le zoom à chaque réexécution du programme ! On peut revenir à l'affichage « de base » avec `unzoom`.
- En ligne de commande, pour centrer les axes :
```
a=gca()// pour get current axes : la donnée est stockée dans la variable a
a.x_location="middle" // méthode agissant sur la variable a
a.y_location="middle"
```

c) Tracez sur le même graphe la première bissectrice, d'une autre couleur.

d) Déterminez graphiquement les coordonnées des points d'intersection entre les deux courbes dans $[0, 2\pi]$.

e) Déterminez numériquement ces points d'intersections avec la fonction `fsolve` et rajoutez les sur la figure avec le symbole `o` d'une autre couleur.

2 Etude de familles de fonctions et de suites définies implicitement

2.1 Premier exemple de tracés simultanés :

a) Tracer de manière automatique, dans une même fenêtre, le graphe des fonctions $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $x \mapsto x^n$ pour $n = 1, \dots, 10$. On donnera (avec `plot2d`) au graphe de f_n la couleur numéro n (pratique non ?)

b) Faire la même chose pour les $x \mapsto x^\alpha$ pour α allant de 0.1 à 10 avec un pas de 0.1 (cette fois il faudra faire quelque chose de différent pour les couleurs).

2.2 La suites des polynômes de Taylor de l'exponentielle : programmation et tracé d'une famille de fonctions

On note $f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. On démontrera bientôt que pour chaque x, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

Motivation (double) • On veut définir une fonction `Taylor_exp(x,n)` qui prend comme argument un réel x et un entier n et renvoie $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

• En fait comme ensuite on veut tracer cette famille de fonctions on aura besoin que les fonctions calculées s'appliquent à une variable vectorielle. Cela demandera quelque aménagements...

a) Fabriquez une fonction SciLab, qui prend comme arguments un entier `n` et un flottant `x` et renvoie la valeur de $f_n(x)$.
(M1) avec une boucle `for` de manière très standard (cf. exples vus en Python)

(M2) par calcul sur les vecteurs, sans boucle `for`. Pour cela il s'agit de créer un vecteur contenant les $x^k/k!$ puis d'utiliser la fonction `sum`.

Essayer de tracer une des fonctions obtenues par exemple pour $n = 5$, en l'appliquant à un vecteur `x` ?

b) Fabriquer une deuxième fonction qui fait la même chose mais accepte une variable `x` vectorielle et s'applique alors à chaque entrée de x : une façon de faire est d'utiliser une boucle `for`) qui va parcourir les entrées et créer un vecteur y correspondant.

Intérêt : on peut alors tracer le graphe !

c) Aller voir dans l'aide en ligne comment fonctionne `feval` et du coup comment tracer le graphe d'une fonction f_n même avec votre fonction du a).

La commande `feval` réalise un *mappage* de vecteurs.

2.3 La suites des polynômes de Taylor de l'exponentielle : tracés, zéros

a) Tracez sur une même figure les graphes des fonctions f_n pour $n \in [\![1, 20]\!]$ et $x \in [-5, 5]$.

b) Recadrez, zoomez, pour voir les éventuels zéros des f_n.

c) Exercice de mathématique :

   i) Démontrer que les f_{2n} ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$ et que les f_{2n+1} ont un unique zéro dans $\mathbb{R}$.

   ii) On note x_n l'unique zéro de f_{2n+1}. A l'aide de SciLab faire une conjecture sur le comportement de la suite (x_n). Puis démontrer cette conjecture en faisant des mathématiques.

3 Tracés de courbes paramétrées

Après avoir étudié sur quel intervalle de temps t il est bon de les tracer, et les symétries qui devront apparaître, tracez les courbes paramétrées définies par

a) $t \mapsto (\cos(3t), \sin(t) + \cos(t))$. Placer aussi le point $M(0)$ avec une étoile rouge et tracer un segment tangent en ce point en rouge aussi.

b) $t \mapsto (3\cos t - 2\sin^3 t, \cos(4t))$. Dans le menu édition de la figure, voir si vous pouvez modifier la place des axes : mettez les axes au centre. Vous pouvez aussi le faire en ligne de commande comme indiqué ci-dessous

c) $t \mapsto (\dfrac{t+1}{t(t-1)}, \dfrac{t(t+1)}{t-1})$.

   i) Prenez garde aux opérations sur les vecteurs de données `t`.

   ii) Prenez garde : SciLab va joindre les points aux travers des discontinuités. Comment éviter ce phénomène (déjà rencontré pour la fonction tangente) !

   iii) Comment pourrait-on calculer s'il y a des *droites asymptotes* ?

4 Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: première partie

4.1 Représentation des itérées d'une fonction $f : x \mapsto x^2 + c$

Notation : Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois } f}$.

On a vu au chapitre sur les suites récurrentes que même pour une simple fonction polynomiale du second degré f, les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ donnent des comportements assez riches... en fait la richesse (et la complexité) des ces suites va bien au delà des exemples que nous avons étudiés.

Une première façon de comprendre cette complexité est de tracer à quoi ressemble $f^{\circ n}$.

Exercice : Tracez le graphe de $f^{\circ n}$ pour $f : x \mapsto x^2 + c$ pour $c = -1,39$ et $n = 6, 10, 15$, notamment pour $x \in [-1, 1]$. Remarque : quel est le degré de cette fonction polynomiale ?

4.2 Histoire d'un germe

Pour chaque point x_0 (appelé *germe*) on considère la suite (x_n) définie par ce x_0 et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Avec la notation du paragraphe précédent, on a $x_n = f^{\circ n}(x_0)$.

Pour avoir une représentation graphique de la suite (x_n) on va tracer les points (n, x_n) pour $n \in \mathbb{N}$ (bien sûr en fait pour une partie de $\mathbb{N}$!). Ce graphe sera appelé *l'histoire du point* x_0.

On choisit ici $x_0 = -1$ et toujours $f : x \mapsto x^2 + c$. Tracez les points (n, x_n) dans les différents cas suivants :

a) si $c = -1$. Justifier le résultat visible sur le tracé.

b) si $c = -1,3$. Commentez le résultat. Regardez des valeurs numériques plus précises pour préciser votre analyse.

c) si $c = -1,8$. Commentez ?

4.3 Etude mathématique plus précise et visualisation

On considère toujours $f_c : x \mapsto x^2 + c$.

a) Déterminer la CNS sur c pour que f_c ait un point fixe (réel !). On suppose désormais cette condition réalisée.

b) Déterminer la CNS sur c pour qu'un de ces deux points fixes soit *attractif.*

c) Déterminer la CNS sur c pour qu'en outre f_c ait des points périodiques de période 2 i.e. il existe des $x \in \mathbb{R}$ tels que $(f \circ f)(x) = x$ et $f(x) \neq x$.

d) On pourrait de même se demander lesquels parmi ces points périodiques de périodes 2 sont *attractifs* pour $f \circ f$... regarder de même les points périodiques de période 4 et c... mais cela on a le voir avec l'ordinateur !

   Pour cela, réaliser le tracé suivant appelé *figure de la cascade.*

   Pour différentes valeurs de $c \in [-2, 1/4]$ (disons 10, puis 50 puis 100), on va

   i) Calculer tous les termes de la suite u_n ayant comme valeur initiale $u_0 = 0$ (important) et telle que $u_{n+1} = f_c(u_n)$, pour $n \in [\![1, 100]\!]$.

   ii) Tracer les points $(u(n), c)$ pour $n \in [\![50, 100]\!]$ dans un cadre avec des abscisses dans $[-2, 2]$ et des ordonnées $c \in [-2, 1/4]$.

   On utilisera `plot2d` avec l'argument `style=[0]` pour avoir des points non reliés.

   Autrement dit : pour chaque valeur de c en ordonnée, on trace 50 points sur la droite horizontale d'ordonnée c correspond aux 50 valeurs de la suite (u_n) correspondant à cette valeur de c.

   Pourquoi part-on de $n = 50$ pour tracer les u_n ? Pour éliminer les premières valeurs non significatives ! A partir de 50, le comportement de la signe « vers l'infini » s'affirme...

e) Comment interpréter la zone du graphe obtenu pour $c > -3/4$?

f) Même question pour $c \in]-5/4, -3/4[$?

g) A partir du graphe précédent, en zoomant, en rajoutant éventuellement des valeurs de c déterminer à partir de quelle valeur de c la suite a 4 points périodiques attractifs.

5 La même suite récurrente dans le monde complexe

On considère la fonction définie par la même formule $f : z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 + c \in \mathbb{C}$ avec $c \in \mathbb{C}$. L'itération de cette fonction permet de mettre en évidence des fractales célèbres.

Ensemble de Mandelbrot

Problème : on cherche à savoir pour quelle valeur de $c \in \mathbb{C}$ la suite (z_n), définie par $z_0 = 0$ (ce choix de valeur initiale est important) et $z_{n+1} = f_c(z_n)$, reste bornée.

Ce qu'on veut faire On représente pour chaque valeur de $c = a + ib$ avec $a \in [-2, 2]$ et $b \in [-2, 2]$, le point d'affixe c en bleu si la suite est bornée et en rouge si la suite n'est pas bornée.

Pour tester si la suite est bornée, on peut se contenter ici de calculer 20 termes et de tester si le module du dernier terme calculé est plus grand que 100.

Ceci semble très approximatif : en fait, on peut montrer que si pour un n_0, $|z_{n_0}| > |c| + 1$ alors la suite est non bornée. Donc notre comparaison avec 100 est très suffisante !

Comment tracer des points :

(M1) Avec plot : ce sera assez peu précis, on peut tracer des "ro" et "bo" dans plot.

(M2) Avec Matplot La commande `Matplot` prend en entrée un tableau A dans lequel on met des numéros de couleurs. Si on met par exemple 200×300 entrées on aura alors un joli tracé 200×300 points dont voici le résultat. A vous de jouer (voire de faire mieux !)