Chapitre S3 : algorithmes de recherches de zéros de fonctions

0 Préliminaire : ce que se cache derrière le `fsolve` ?

On a utilisé jusqu'à maintenant la commande `fsolve` de SciLab : `fsolve(x0,f)` cherche un zéro de `f` au voisinage d'un certain `x0`.

De même en Python, il existe une commande `fsolve` dans le module SciPy consacré au calcul scientifique.

On a vu aussi que cette commande est parfois assez *sensible* au choix de la condition initiale `x0`. Par exemple pour résoudre l'équation $\tan(x) = x$ (cf. TP S1).

Ce qui suit va nous expliquer ce qui est caché derrière `fsolve` et le pourquoi de ces phénomènes de sensibilité au choix de `x0`.

Remarque préliminaire importante : l'étude numérique des zéros d'une fonction commence déjà par l'étude des variations. On essaie (si possible !) de se placer sur un intervalle I sur lequel $f_{|I}$ est strictement monotone et change de signe, pour être sûr de l'unicité du zéro que l'on cherche à approcher. La représentation graphique y aide bien sûr !

1 La méthode déjà connue : dichotomie

Revoir le T.P. 6

1.1 Entrées et sorties de cette méthode

- Données : $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$ (quitte à remplacer f par $-f$).
- Algo. : fabrique des suites (a_n) et (b_n) telles que $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) \geq 0$ et $b_n - a_n = (b-a)/2^n$.
- Conséquence théorique : la limite commune à ces deux suites adjacentes donne un zéro r de f, ce qui démontre le T.V.I.
- Conséquence pratique : en s'arrêtant à une étape n, les nombres $a_n$et b_n fournissent un encadrement d'un zéro de f à $(b-a)/2^n$ près.

1.2 Les avantages de cette méthode, et ce qu'on peut espérer de mieux

- Avantages :
  - elle s'applique à n'importe quelle fonction continue (hyp. de régularité très faible sur f),
  - elle converge *toujours* vers un zéro,
  - la convergence est *géométrique* : en $O(\frac{1}{2^n})$.
- Ce qu'on peut espérer de mieux : le processus de dichotomie est indépendant de la forme de la fonction f :

  pour des bonnes fonctions f (plus régulières, par exemple $\mathcal{C}^2$), on va trouver des méthodes qui vont plus vite en tenant mieux compte des propriétés de f.
  En revanche, ces méthodes ne convergeront pas forcément... donc plus vite mais moins sûr...

- **Remarque pour plus tard :** Quand vous étudierez des fonctions des fonctions de plusieurs variables, disons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la dichotomie n'aura plus de sens, il faudra bien d'autres méthodes. Il se trouve qu'on celles qu'on va développer ici se généraliseront aussi à ce cadre-là.

2 Introduction aux méthodes itératives

2.1 L'idée de base : remplacer les zéros par des points fixes

On connaît bien le fait suivant :

Pour g *continue*, si une suite (u_n), définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge, alors sa limite est un point fixe de g.

Moralité :

Numériquement, les points fixes d'une fonction g s'approchent en itérant des suites $u_{n+1} = g(u_n)$, *pourvu que ces suites convergent.* On parle d'approche *itérative.*

Principe des méthodes itératives

Pour résoudre une équation $f(x) = 0$, on la remplace par une équation équivalente $g(x) = x$, en choisissant g de sorte que, pour u_0 dans le voisinage du zéro pressenti :
- les suites (u_n) définies par $u_{n+1} = g(u_n)$ convergent effectivement,
- et cette convergence soit rapide.

L'idée la plus évidente pour la fonction g

Bien sûr $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + x = x$, et donc on peut considérer $g(x) = f(x) + x$ et les suites $u_{n+1} = g(u_n)$ associées. Le problème est que ces suites ne convergent pas forcément, comme on va le revoir après le petit rappel suivant.

2.2 Ce qu'on sait déjà sur la convergence vers les points fixes

a) **Si g est k-lipschitzienne sur $I = [a,b]$ avec $k < 1$ alors :** la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$...

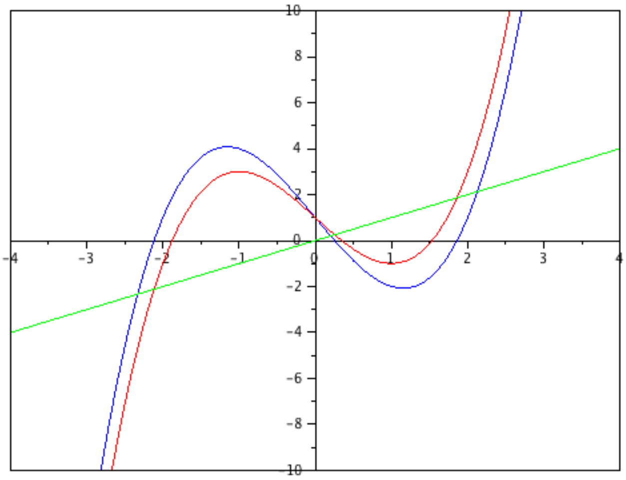
b) Caract. commode : **Pour $g \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, on sait que g est k-lip. sur I ssi**

c) **Pour $g \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ un point fixe $a \in I$ de g est dit *attractif*** ssi **$|g'(a)| < 1$.** Dans ce cas, il existe un voisinage $V = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ de a surlequel g est k-lip. avec $k < 1$ et si $u_0 \in V$ ...

d) **Avec les notations du d), a est dit répulsif ssi $|g'(a)| > 1$.** Dans ce cas, la seule possibilité pour que (u_n) converge vers a est que (u_n) soit constante égale à a APCR.

2.3 Ce que donne l'exemple naïf de $g(x) = f(x) + x$

Imaginons qu'on veuille résoudre une équation du troisième degré $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 - 4x + 1$. L'idée naïve de chercher les points fixes de $g(x) = f(x) + x$ nous donne la fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ dont le graphe est en rouge, celui de f est en bleu.



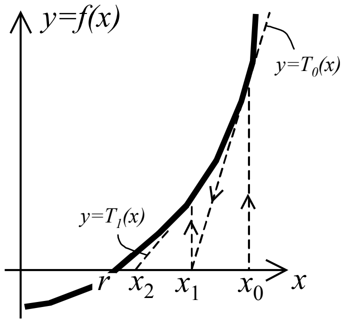
Mauvaise nouvelle : deux points fixes de g sont clairement répulsifs.

3 Construction d'une fonction g très efficace : la méthode de Newton

Hypothèse : On se donne une fonction f dérivable sur un intervalle I contenant une racine r de l'équation $f(r) = 0$. On fixe un $x_0 \in I$ pas trop loin du zéro que l'on cherche.

3.1 Idée géométrique de la méthode

On considère la tangente $T_{x_0}\Gamma_f$ au graphe de f au point d'abscisse x_0. Si celle-ci coupe l'axe, on note x_1 l'abscisse de ce point d'intersection dont on espère qu'il est plus proche de r. On recommence alors cette construction à partir du point $(x_1, f(x_1))$. On espère que cela définit une suite (x_n) et qu'elle converge vers r.



3.2 Traduction algébrique

A l'étape n, l'équation de la tangente au point $M_n = (x_n, f(x_n))$ est :

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

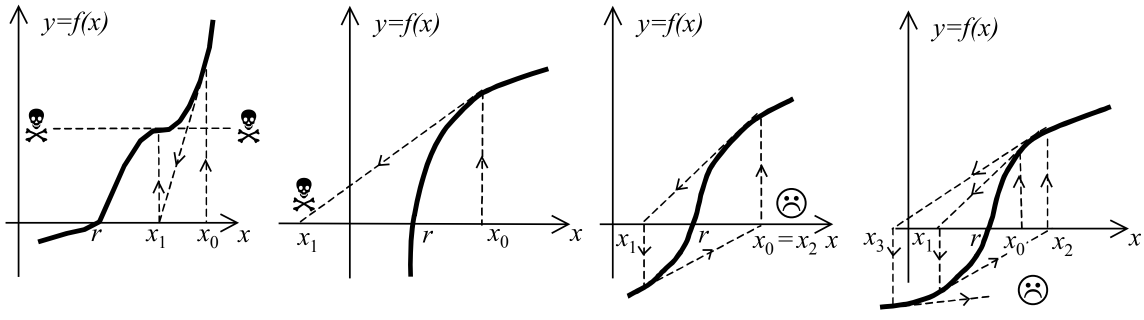
Donc le point x_{n+1} s'il existe est solution de l'équation :

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n),$$

ce qui équivaut à (en supposant bien sûr que $f'(x_n) \neq 0$.

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$

3.3 Quelques écueils à éviter du point de vue global



• L'écueil de la figure 1 correspond à un point au f' s'annule : tangente horizontale, la suite n'est plus définie, cela se voyait déjà au 3.2

• Même si f' ne s'annule pas, et donc, dans le cas des figure où f est croissante, $f' > 0$, la figure 2 montre que x_1 peut sortir de l'ensemble de définition de f. La fonction f de cette figure est concave.

• Les figures 3 et 4 montrent une fonction avec un point d'inflexion et où la suite (x_n) ne converge pas.

3.4 Résultat global pour le cas part. des fonctions st. croissantes convexes

Nous le formulons sous la forme d'un :

Exercice : Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ avec $f' > 0$ et $f'' \geq 0$ avec $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.

a) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et montrer qu'elle est décroissante.

Indication : Faire un dessin !

b) Montrer que la suite (x_n) converge vers un nombre que l'on appelle l.

c) Montrer que l est l'unique zéro de f sur $[a,b]$.

d) Formuler le **théorème de convergence globale** que l'on vient de démontrer. En appliquant le résultat précédent à $-f$ qu'obtient-on ?

3.5 Etude de l'attractivité du point fixe dans la méthode de Newton

Vu le résultat obtenu au § 3.4, au moins dans ce cas, on est sûr que le point fixe n'est pas répulsif. On va voir qu'on a en fait un résultat très fort :

3.5.1 Une propriété générale de la méthode de Newton

Exercice à faire : On se donne $f \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ avec r un zéro de f dans I telle que f' ne s'annule pas sur I, et on note $\forall\, x \in I$, $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Calculer $\varphi'(r)$.

Définition : Un point fixe r d'une application φ tel que $\varphi'(r) = 0$ est appelé *point fixe superattractif.*

On vient de démontrer la :

Propriété La méthode de Newton transforme toujours un zéro de f en un point fixe *superattractif* de $\varphi : x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

3.5.2 Propriété générale qui justifie le mot *superattractif*

Bien sûr un point fixe superattractif est en particulier attractif et comme $|\varphi'(a)| \leq k$ pour tout k, la convergence des suites associées $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ est en $O(k^n)$ pour tout k (et donc aussi en $o(k^n)$ pour tout k). Beaucoup mieux, cette notion donne encore au saut de rapidité, comme on le démontre dans la prop. suivante :

Propriété : Soit $\varphi : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ quelconque ayant un point fixe r superattractif i.e. tel que $\varphi'(r) = 0$. On note $M_2 = \sup_{[a,b]} |f''|$. Alors :

(C1) $\forall\, x \in I,\ |\varphi(x) - r| \leq \dfrac{M_2}{2}|x - r|^2$,

(C2) On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - r| \leq \frac{2}{M_2}\left[\frac{M_2}{2}|x_0 - r|\right]^{2^n}$$

(C3) Si on choisit x_0 pour que $\dfrac{M_2}{2}|x_0 - r| < 1$, alors la suite définie par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge vers r en $O(k^{2^n})$ où $k = \dfrac{M_2}{2}|x_0 - r|$. On dit que la convergence est *supergéométrique.*

Exercice à faire en classe : *prouver cette propriété.*

Illustration numérique : Si on choisit x_0 pour $|x_0 - r| < \dfrac{1}{5M_2}$ alors $k = \dfrac{M_2}{2}|x_0 - r| \leq \dfrac{1}{10}$ et la **(C2)** ci-dessus donne que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ |x_n - r| \leq \frac{2}{M_2}(\frac{1}{10})^{2^p}.$$

Le nombre de décimales en approximant r par x_n double à chaque étape : en laissant de côté la constante $2/M$, avec 10 itérations on a une approximation à $10^{-2^{10}} = 10^{1024}$ près, donc plus de mille décimales exactes.

3.6 Conséquence des résultats § 3.5 : convergence locale

On obtient immédiatement le :

Thm. de convergence locale : Soit $f \in \mathcal{C}^3(I,\mathbb{R})$ ayant un zéro r dans I telle que f' ne s'annule pas sur un voisinage V de r dans I. Il existe un voisinage $W \subset V$ de r tel que si $x_0 \in V$, la méthode de Newton appliquée à f à partir du point x_0 converge supergéométriquement vers x_0.

Remarque 1 : Ce théorème s'applique même si r est un *point d'inflexion* de f, puisque les preuves du § 3.5 n'utilisent pas le signe de f''.

Remarque 2 : L'hyp. $\mathcal{C}^3$ est purement technique, pour que φ soit $\mathcal{C}^2$ et que la preuve faite plus haut s'applique. En travaillant un peu plus, on peut diminuer cette hypothèse de régularité, mais ce n'est pas crucial ici pour nous

Remarque 3 : Le problème crucial pour l'analyse numérique est de savoir comment être sûr de tomber dans le bon voisinage W ! Et ce n'est pas si simple, on verra des exemples au T.P. S3.

3.7 Mise en oeuvre de la méthode de Newton sur machine :

On la fera au T.P. S3 : on veut fabriquer une fonction (en Python ou SciLab) qui prend en argument `f, x0,n` et calcule l'effet de la méthode de Newton itérée n à partir de `x0`. Pour cela, on a besoin d'un calcul de f'.

On verra les différentes méthodes possibles en T.P :

- la plus évidente étant de remplacer $f'(x_0)$ par un petit taux de variation de f autour de x_0 : on verra en T.P. comment ces taux de variations peuvent donner des écarts de calculs par rapport au nombre dérivé.

- on verra en T.P. l'intérêt de considérer plutôt des taux de variations symétriques,
- Pour une fonction *explicite* dont on connaît explicitement la dérivée, on peut aussi utiliser directement l'expression de la dérivée. Les logiciels de calculs formels permettent de mettre cela aussi dans le programme. C'est possible en PYTHON avec le module SYMPY (SYMbolic Computation with PYthon).