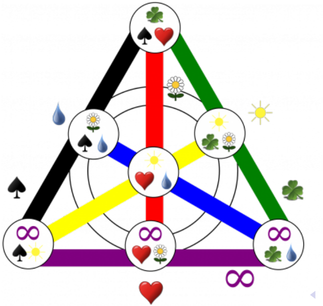
Dobble et la géométrie

Romain Bondil

Lycée Joffre, Montpellier

A partir d'un billet de M. Bourrigan sur le site : Images des mathématiques (mai 2011)

Mars 2014



Introduction : un jeu de rapidité !

- Présentation du jeu :
  - 55 cartes en forme de disque,
  - sur chaque carte, 8 symboles différents dessinés.

Introduction : un jeu de rapidité !

- Présentation du jeu :
  - 55 cartes en forme de disque,
  - sur chaque carte, 8 symboles différents dessinés.

- Une phase de jeu :
  - Une carte est placée au centre,
  - chaque jour reçoit un paquet avec le même nombre de cartes,
  - le premier joueur à reconnaître un symbole commun entre sa carte et celle du centre dit le nom de ce symbole et place sa carte au centre, par dessus la précédente.

Introduction : un jeu de rapidité !

- Présentation du jeu :
  - 55 cartes en forme de disque,
  - sur chaque carte, 8 symboles différents dessinés.
- Une phase de jeu :
  - Une carte est placée au centre,
  - chaque jour reçoit un paquet avec le même nombre de cartes,
  - le premier joueur à reconnaître un symbole commun entre sa carte et celle du centre dit le nom de ce symbole et place sa carte au centre, par dessus la précédente.
- Le jeu continue jusqu'à ce que l'un des joueurs se soit débarassé de tout son tas.

Une phase de jeu

Les maths pour ne pas laisser de place au hasard

- A tout moment, tous les joueurs sont à égalité de chance !
  En effet, DOBBLE est construit sur le principe suivant :

Les maths pour ne pas laisser de place au hasard

- A tout moment, tous les joueurs sont à égalité de chance !
  En effet, DOBBLE est construit sur le principe suivant :

  Deux cartes quelconques de DOBBLE ont toujours exactement un symbole en commun.

Les maths pour ne pas laisser de place au hasard

- A tout moment, tous les joueurs sont à égalité de chance !
  En effet, DOBBLE est construit sur le principe suivant :

  Deux cartes quelconques de DOBBLE ont toujours exactement un symbole en commun.

- Problème : comment fabriquer ces cartes “magiques” ?

Les maths pour ne pas laisser de place au hasard

- A tout moment, tous les joueurs sont à égalité de chance !
  En effet, DOBBLE est construit sur le principe suivant :

Deux cartes quelconques de DOBBLE ont toujours exactement un symbole en commun.

- Problème : comment fabriquer ces cartes “magiques” ?

La solution va venir de la géométrie

§1 Géométrie : Euclide

- Euclide (*Eléments* livre 1), définitions) :

  - *Définition 1* : le point est ce dont la partie est nulle.

  - *Définition 2* : une ligne est une longueur sans largeur.

§1 Géométrie : Euclide

- Euclide (*Eléments* livre 1), définitions) :

  - *Définition 1* : le point est ce dont la partie est nulle.

  - *Définition 2* : une ligne est une longueur sans largeur.

- Le problème de ces définitions : elles reposent sur d'autres peu claires : les notions de longueurs et de largeurs sont aujourd'hui *définies après* celle de point, mais :

§1 Géométrie : Euclide

- Euclide (*Eléments*, livre 1, axiomes (*reformulés*)) :
  • *Axiome 1* : par deux points passe une unique droite.
  • *Axiome 5* : si on se donne une droite D et un point P extérieur à cette droite, il existe une unique droite parallèle à D passant par P.

§1 Géométrie : Euclide

- Euclide (*Eléments*, livre 1, axiomes (*reformulés*)) :
  • *Axiome 1* : par deux points passe une unique droite.
  • *Axiome 5* : si on se donne une droite D et un point P extérieur à cette droite, il existe une unique droite parallèle à D passant par P.

- Ce qui rend l'oeuvre d'Euclide immortelle :

  Les raisonnements d'Euclide se fondent seulement sur ses axiomes et non sur ses définitions "descriptives".

§1 Géométrie : Euclide

- Euclide (*Eléments*, livre 1, axiomes (*reformulés*)) :
  • *Axiome 1* : par deux points passe une unique droite.
  • *Axiome 5* : si on se donne une droite D et un point P extérieur à cette droite, il existe une unique droite parallèle à D passant par P.

- Ce qui rend l'oeuvre d'Euclide immortelle :

  Les raisonnements d'Euclide se fondent seulement sur ses axiomes et non sur ses définitions “descriptives”.

- Point de vue moderne :

  Les mathématiques s'intéressent moins à la nature des objets qu'aux *relations* entre ces objets.

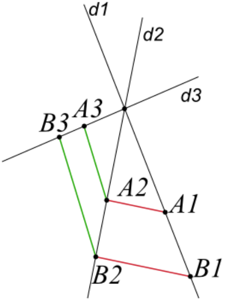
§1 Géométrie : Euclide modernisé (fin XIXe)

Un plan $\mathcal{P}$ *affine* est un *ensemble* dont on choisit d'appeler les éléments *points* muni de *sous-ensembles* appelés *droites* régis par les axiomes :

• *Axiome 1* : si on se donne deux points de $\mathcal{P}$, il y a une unique droite qui les contient,

• *Axiome 2* : si on se donne une droite D et un point P extérieur à cette droite, il existe une unique droite parallèle à D contenant P (déf. parallèle : pas de points communs).

• *Axiome 3, dit de Desargues :*



§1 Géométrie : Euclide et DOBBLE

- Analogie entre les règles :
  - (Axiome Dobble) **Deux cartes quelconques ont toujours exactement un symbole en commun.**
  - (Axiome d'Euclide) **Deux points distincts de $\mathcal{P}$ sont toujours sur une unique droite**.

§1 Géométrie : Euclide et DOBBLE

- Analogie entre les règles :
  - (Axiome Dobble) **Deux cartes quelconques ont toujours exactement un symbole en commun.**
  - (Axiome d'Euclide) **Deux points distincts de $\mathcal{P}$ sont toujours sur une unique droite**.
- Si l'on accepte que :
  - Les cartes DOBBLE représentent les points,
  - les symboles DOBBLE représentent les droites ! (Ce sont les symboles qui "relient les cartes entre elles".)

§1 Géométrie : Euclide et DOBBLE

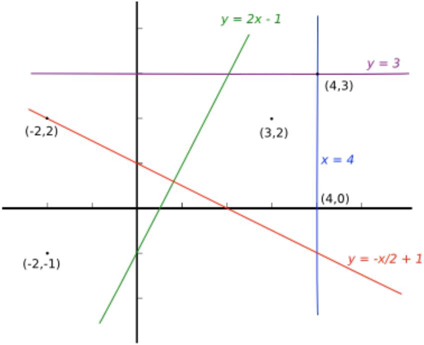
- Analogie entre les règles :
  - (Axiome Dobble) **Deux cartes quelconques ont toujours exactement un symbole en commun.**
  - (Axiome d'Euclide) **Deux points distincts de $\mathcal{P}$ sont toujours sur une unique droite**.
- Si l'on accepte que :
  - Les cartes DOBBLE représentent les points,
  - les symboles DOBBLE représentent les droites ! (Ce sont les symboles qui "relient les cartes entre elles".)
- A ce prix là :

§1 Géométrie : Euclide et DOBBLE

- Analogie entre les règles :
  - (Axiome Dobble) **Deux cartes quelconques ont toujours exactement un symbole en commun.**
  - (Axiome d'Euclide) **Deux points distincts de $\mathcal{P}$ sont toujours sur une unique droite**.
- Si l'on accepte que :
  - Les cartes DOBBLE représentent les points,
  - les symboles DOBBLE représentent les droites ! (Ce sont les symboles qui "relient les cartes entre elles".)
- A ce prix là :
  "Avoir le même symbole" revient à "être sur la même (drôle de) droite !"

§2 Géométrie : Descartes

Dans “La géométrie”, appendice au *Discours de la méthode* (1637), introduction des *coordonnées* (x, y), *qui sont deux* nombres.



§3 D’autres (drôles de) nombres

- Pour les grecs, les *longueurs* entre deux points d’une droite n’étaient pas vraiment des *nombres*...

§3 D'autres (drôles de) nombres

- Pour les grecs, les *longueurs* entre deux points d'une droite n'étaient pas vraiment des *nombres*...
- Descartes, en établissant un *calcul* sur les longueurs (addition, multiplication, racines carrées...), leur donne le statut de *nombres*.

§3 D'autres (drôles de) nombres

- Pour les grecs, les *longueurs* entre deux points d'une droite n'étaient pas vraiment des *nombres*...
- Descartes, en établissant un *calcul* sur les longueurs (addition, multiplication, racines carrées...), leur donne le statut de *nombres*.

  Les nombres qui "représentent" notre intuition des points d'une droite seront appelés (plus tard) les nombres réels

§3 D’autres (drôles de) nombres

- Pour les grecs, les *longueurs* entre deux points d’une droite n’étaient pas vraiment des *nombres*...
- Descartes, en établissant un *calcul* sur les longueurs (addition, multiplication, racines carrées...), leur donne le statut de *nombres*.

  Les nombres qui “représentent” notre intuition des points d’une droite seront appelés (plus tard) les nombres réels

  Mais il existe bien d’autres ensembles de nombres !

§3 D'autres (drôles de) nombres

- Pour les grecs, les *longueurs* entre deux points d'une droite n'étaient pas vraiment des *nombres*...
- Descartes, en établissant un *calcul* sur les longueurs (addition, multiplication, racines carrées...), leur donne le statut de *nombres*.

  Les nombres qui “représentent” notre intuition des points d'une droite seront appelés (plus tard) les nombres réels

  Mais il existe bien d'autres ensembles de nombres !

  Pour comprendre ce que peut vouloir dire une *Droite de Dobble*, on a besoin d'un système de nombres *fini*.

§3 D'autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*

§3 D’autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*
- On décide de représenter le caractère pair par 0 et le caractère impair par 1, on obtient les tables :

§3 D'autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*
- On décide de représenter le caractère pair par 0 et le caractère impair par 1, on obtient les tables :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

§3 D'autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*
- On décide de représenter le caractère pair par 0 et le caractère impair par 1, on obtient les tables :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Et un tout petit plan associé à ces nombres :

§3 D'autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*
- On décide de représenter le caractère pair par 0 et le caractère impair par 1, on obtient les tables :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Et un tout petit plan associé à ces nombres :

Les points du plan sont les (x, y) où $x = 0$ ou 1 et $y = 0$ ou 1 :

§3 D'autres (drôles de) nombres

Un tout petit système de nombres :

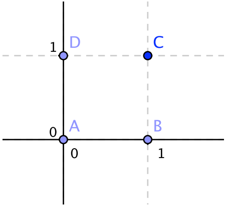
- Remarque : si on connaît le caractère *pair* ou *impair* de deux entiers, on connaît aussi celui de leur *somme* et de leur *produit*
- On décide de représenter le caractère pair par 0 et le caractère impair par 1, on obtient les tables :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

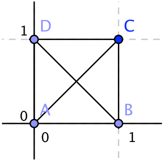
Et un tout petit plan associé à ces nombres :

Les points du plan sont les (x, y) où $x = 0$ ou 1 et $y = 0$ ou 1 :
Un plan $\mathcal{P}_2$ avec quatre points



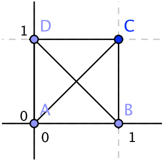
§4 Géométrie dans le plan à 4 points et BB DOBBLE

- **Notre plan $\mathcal{P}_2$:**
  - quatre points dans le plan,
  - six droites passant chacune deux points exactement.
  - Chaque point est exactement sur trois droites.



§4 Géométrie dans le plan à 4 points et BB DOBBLE

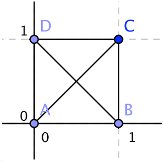
- **Notre plan $\mathcal{P}_2$:**
  - quatre points dans le plan,
  - six droites passant chacune deux points exactement.
  - Chaque point est exactement sur trois droites.



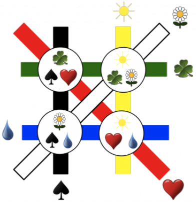
- **Un (petit) jeu de** DOBBLE **avec**
  - quatre cartes dans le jeu,
  - six symboles présents chacun sur deux cartes exactement.
  - Chaque carte porte exactement trois symboles.

§4 Géométrie dans le plan à 4 points et BB DOBBLE

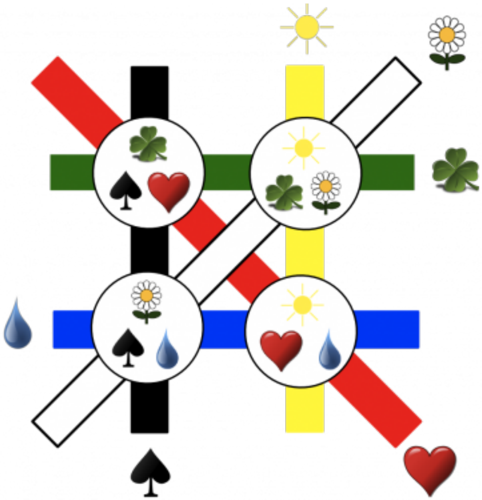
- **Notre plan $\mathcal{P}_2$:**
  - quatre points dans le plan,
  - six droites passant chacune deux points exactement.
  - Chaque point est exactement sur trois droites.



- **Un (petit) jeu de DOBBLE avec**
  - quatre cartes dans le jeu,
  - six symboles présents chacun sur deux cartes exactement.
  - Chaque carte porte exactement trois symboles.



§4 : Géométrie à 4 points et BB Dobble



Penser aux symboles comme ce qui “relie” deux cartes...

§5 : un système de nombres un peu plus grand

- Dans le système précédent, la parité et l'imparité, codées par 0 et 1, se voient aussi comme le *reste* de la division d'un nombre par 2.

§5 : un système de nombres un peu plus grand

- Dans le système précédent, la parité et l'imparité, codées par 0 et 1, se voient aussi comme le *reste* de la division d'un nombre par 2.
- En remplaçant la division par 2 par la division par 3 : à partir de $0, 1, 2$, on forme les tables :

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

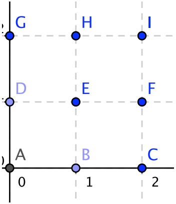
§5 : un système de nombres un peu plus grand

- Dans le système précédent, la parité et l'imparité, codées par 0 et 1, se voient aussi comme le *reste* de la division d'un nombre par 2.
- En remplaçant la division par 2 par la division par 3 : à partir de $0, 1, 2$, on forme les tables :

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

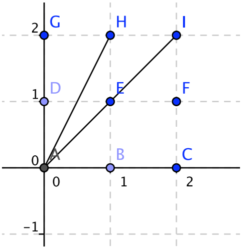
$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

- On en déduit un plan $\mathcal{P}_3$ à $3 \times 3 = 9$ éléments :



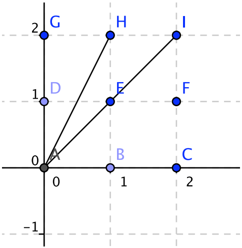
§5 : un système de nombres un peu plus grand

- Un premier dessin de droites dans $\mathcal{P}_3$:



§5 : un système de nombres un peu plus grand

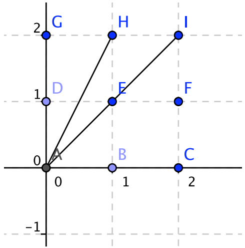
- Un premier dessin de droites dans $\mathcal{P}_3$:



Ce dessin nous ment ! Toutes les droites ont en fait le même nombre de points

§5 : un système de nombres un peu plus grand

- Un premier dessin de droites dans $\mathcal{P}_3$:

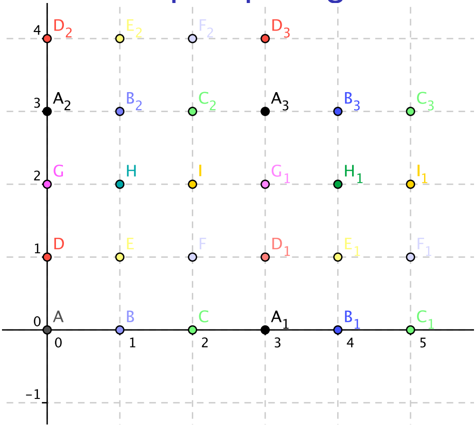


Ce dessin nous ment ! Toutes les droites ont en fait le même nombre de points

- La vraie nature de notre ensemble $\{0,1,2\}$ qu'en maths, on notera, par prudence, $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$:
  - $\overline{0}$ représente tous les nombres multiples de 3, identifiés entre eux.
  - $\overline{1}$ représente tous les nombres $1, 4, 7$ etc...
  - $\overline{2}$ représente tous les nombres $2, 5, 8$ etc...

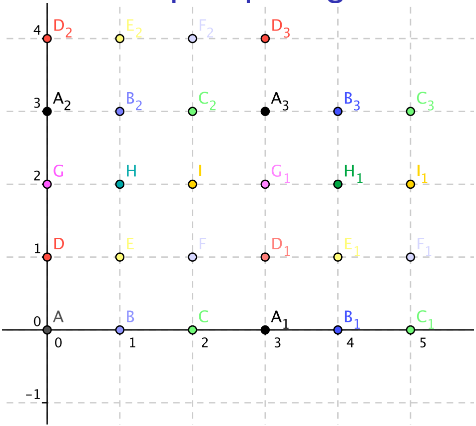
§5 : un système de nombres un peu plus grand

Nouveau dessin du plan $\mathcal{P}_3$

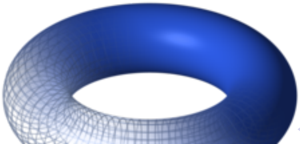


§5 : un système de nombres un peu plus grand

Nouveau dessin du plan $\mathcal{P}_3$



Se déplacer dans $\mathcal{P}_3$ c'est comme se déplacer sur un tore (pneu) :

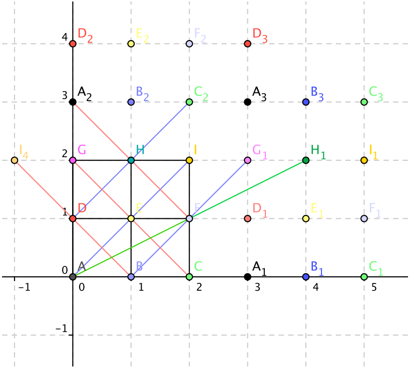


§5 : un système de nombres un peu plus grand

Chaque droite de $\mathcal{P}_3$ contient 3 points (couleurs), il y a 12 droites :
N.B. Ce sont les *équations* qui définissent les droites : outre les 6 équations $x = 0, 1, 2$, $y = 0, 1, 2$ (en noir) les six autres sont données par :

- $y = x$, $y = x + 1$, $y = x - 1 = x + 2$ (bleues)
- $y = -x = -x + 3$, $y = -x + 2$, $y = -x + 1$ (rouges).

La droite verte *AFH* est la même que la droite rouge la plus haute !



§5 : un système de nombres un peu plus grand

- **Notre plan $\mathcal{P}_3$ a donc les caractéristiques suivantes :**
  - 9 points dans le plan,
  - 12 droites,
  - Chaque point est exactement sur 4 droites distinctes

§5 : un système de nombres un peu plus grand

- **Notre plan $\mathcal{P}_3$ a donc les caractéristiques suivantes :**
  - 9 points dans le plan,
  - 12 droites,
  - Chaque point est exactement sur 4 droites distinctes
- **D'où un (petit peu plus gros) jeu de** DOBBLE **avec**
  - 9 cartes dans le jeu,
  - 12 symboles présents chacun sur deux cartes exactement.
  - Chaque carte porte exactement 4 symboles.

§5 : un système de nombres un peu plus grand

- **Notre plan $\mathcal{P}_3$ a donc les caractéristiques suivantes :**
  - 9 points dans le plan,
  - 12 droites,
  - Chaque point est exactement sur 4 droites distinctes
- **D'où un (petit peu plus gros) jeu de** DOBBLE **avec**
  - 9 cartes dans le jeu,
  - 12 symboles présents chacun sur deux cartes exactement.
  - Chaque carte porte exactement 4 symboles.
- Une représentation plus "symétrique" du plan $\mathcal{P}_3$:

§6 Vers le vrai DOBBLE ? Ajouts de points à l'infini

- Le vrai Dobble a 55 cartes.
  Or 55 n'est pas le carré d'un nombre ! On n'arrivera pas à obtenir exactement notre jeu de Dobble à partir de plans finis comme nous avons fait jusqu'à maintenant.

§6 Vers le vrai DOBBLE ? Ajouts de points à l'infini

- Le vrai Dobble a 55 cartes.
  Or 55 n'est pas le carré d'un nombre ! On n'arrivera pas à obtenir exactement notre jeu de Dobble à partir de plans finis comme nous avons fait jusqu'à maintenant.
- Ce qu'on peut faire de plus approchant est de partir d'un ensemble à 7 éléments $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et de fabriquer un plan $\mathcal{P}_7$ avec 49 points, avec 7 points sur chaque droite, mais par rapport à Dobble...

§6 Vers le vrai DOBBLE ? Ajouts de points à l'infini

- Le vrai Dobble a 55 cartes.
  Or 55 n'est pas le carré d'un nombre ! On n'arrivera pas à obtenir exactement notre jeu de Dobble à partir de plans finis comme nous avons fait jusqu'à maintenant.
- Ce qu'on peut faire de plus approchant est de partir d'un ensemble à 7 éléments $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et de fabriquer un plan $\mathcal{P}_7$ avec 49 points, avec 7 points sur chaque droite, mais par rapport à Dobble...
  Il manque quand même 6 points !

§6 Vers le vrai DOBBLE ? Ajouts de points à l'infini

- Le vrai Dobble a 55 cartes.
  Or 55 n'est pas le carré d'un nombre ! On n'arrivera pas à obtenir exactement notre jeu de Dobble à partir de plans finis comme nous avons fait jusqu'à maintenant.
- Ce qu'on peut faire de plus approchant est de partir d'un ensemble à 7 éléments $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et de fabriquer un plan $\mathcal{P}_7$ avec 49 points, avec 7 points sur chaque droite, mais par rapport à Dobble...
  Il manque quand même 6 points !
- L'idée, très féconde, va être de :

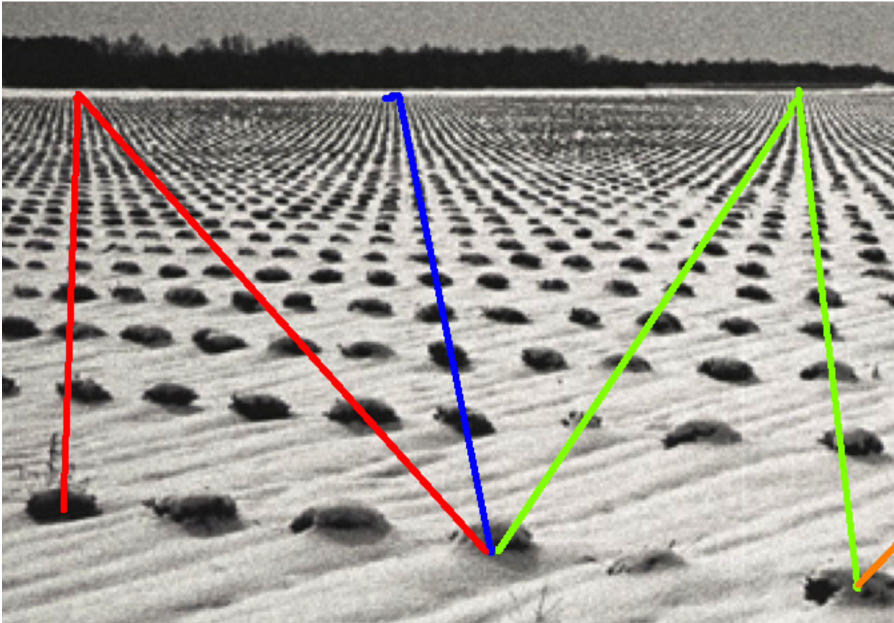
§6 Vers le vrai DOBBLE ? Ajouts de points à l'infini

- Le vrai Dobble a 55 cartes.
  Or 55 n'est pas le carré d'un nombre ! On n'arrivera pas à obtenir exactement notre jeu de Dobble à partir de plans finis comme nous avons fait jusqu'à maintenant.
- Ce qu'on peut faire de plus approchant est de partir d'un ensemble à 7 éléments $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et de fabriquer un plan $\mathcal{P}_7$ avec 49 points, avec 7 points sur chaque droite, mais par rapport à Dobble...
  Il manque quand même 6 points !
- L'idée, très féconde, va être de :
  Rajouter des points à l'infini !

§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?

Regardons un champ de lavande (photo de F. Rouvière) :

§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?



§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?

- Que nous dit l'expérience des photos précédentes ?

§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?

- Que nous dit l'expérience des photos précédentes ?

Un point à l'infini est le point d'intersection de deux droites parallèles !
Mieux c'est le point d'intersection commun à une famille de droites toutes parallèles entre elles.

§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?

- Que nous dit l'expérience des photos précédentes ?

  Un point à l'infini est le point d'intersection de deux droites parallèles !
  Mieux c'est le point d'intersection commun à une famille de droites toutes parallèles entre elles.

- Oui mais « en réalité », les droites parallèles ne se rencontrent pas !

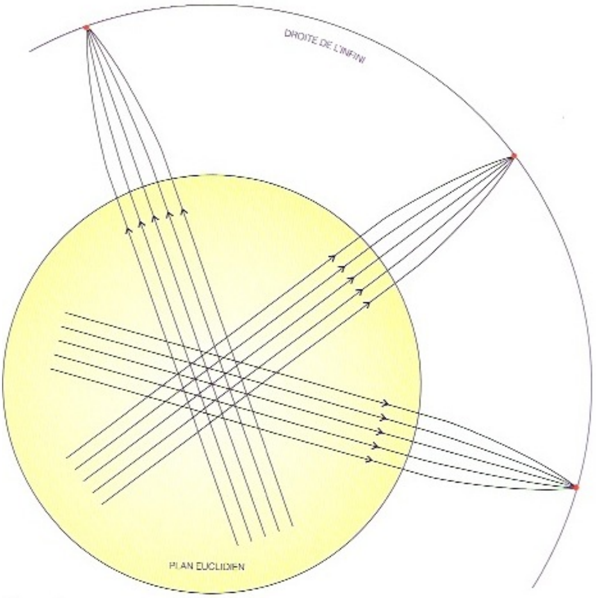
§6.1. Qu'est ce qu'un point à l'infini dans la géométrie usuelle ?

- Que nous dit l'expérience des photos précédentes ?

  Un point à l'infini est le point d'intersection de deux droites parallèles !
  Mieux c'est le point d'intersection commun à une famille de droites toutes parallèles entre elles.

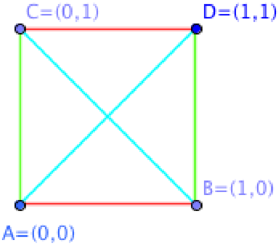
- Oui mais « en réalité », les droites parallèles ne se rencontrent pas !
- Pas de problèmes pour les mathématiciens : la *construction* d'un plan *complété par des points à l'infini* à partir des *plans que nous connaissons* revient donc à rajouter ces points à l'infini.

§6.1. Le plan usuel complété par les points à l'infini



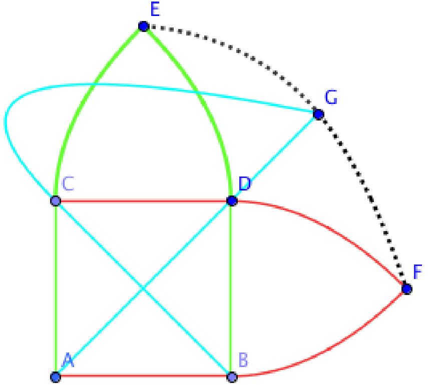
§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

Rappel : Il y avait quatre points et six droites dans $\mathcal{P}_2$, qu'on peut regrouper en trois familles de deux droites parallèles.



§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

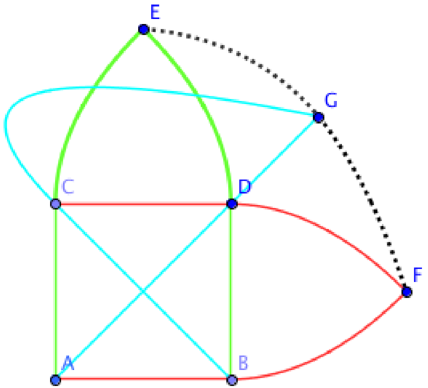
En rajoutant un point à l'infini pour chacune des trois familles :



§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

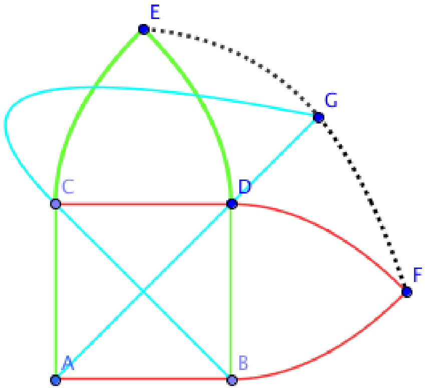
En rajoutant un point à l'infini pour chacune des trois familles :

On est forcé de *courber les droites.*



§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

En rajoutant un point à l'infini pour chacune des trois familles :
On est forcé de *courber les droites.* On rajoute une droite en pointillés reliant les trois points à l'infini.



§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

Courber les droites ? Rajouter une droite à l'infini ? Quelles hérésies ?

§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

Courber les droites ? Rajouter une droite à l'infini ? Quelles hérésies ?

Non.

- D'abord parce que ces courbes ne sont là que pour nous dire que les points *sont* « *mis ensembles* », mais elles ne contiennent que trois points !
- Ensuite car ce qui nous intéresse ici c'est seulement les *relations* entre les objets plus que les objets eux-mêmes, la *configuration* obtenue :

§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

Courber les droites ? Rajouter une droite à l'infini ? Quelles hérésies ?

Non.

- D'abord parce que ces courbes ne sont là que pour nous dire que les points *sont* « *mis ensembles* », mais elles ne contiennent que trois points !
- Ensuite car ce qui nous intéresse ici c'est seulement les *relations* entre les objets plus que les objets eux-mêmes, la *configuration* obtenue :
  - on a un ensemble de 7 éléments (qu'on appelle ici points),

§6.2. La même construction pour le plan $\mathcal{P}_2$ à quatre points

Courber les droites ? Rajouter une droite à l'infini ? Quelles hérésies ?

Non.

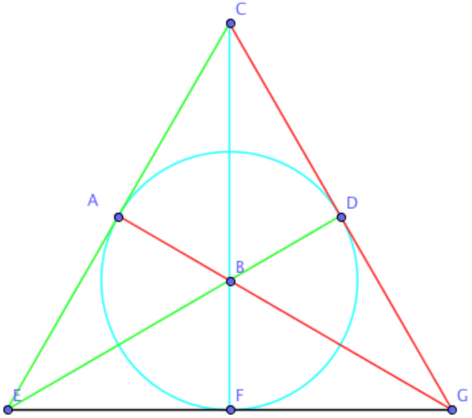
- D'abord parce que ces courbes ne sont là que pour nous dire que les points *sont* ≪ *mis ensembles* ≫, mais elles ne contiennent que trois points !
- Ensuite car ce qui nous intéresse ici c'est seulement les *relations* entre les objets plus que les objets eux-mêmes, la *configuration* obtenue :
  - on a un ensemble de 7 éléments (qu'on appelle ici points),
  - muni de 7 sous-ensembles formés chacune de trois points (appelés droites) : 7 drôles de droites, avec toujours la propriété fondamentale que par deux points passe une unique droite.

§6.2. Une vision plus symétrique de ce plan complété :

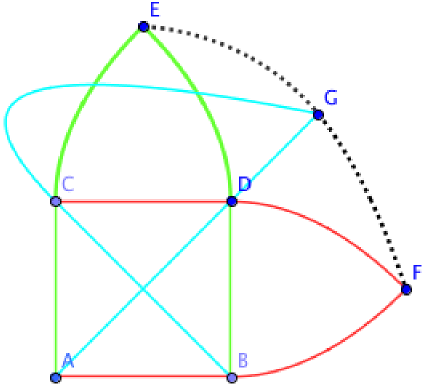
Puisque les *courbes* qu'on trace comme « droites »entre nos points ne sont qu'une aide pour représenter notre configuration, on peut choisir la façon de les courber d'où le second dessin :

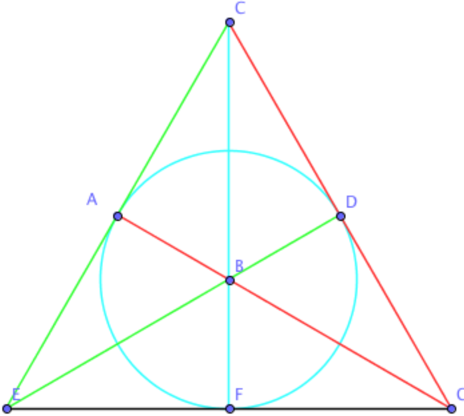
§6.2. Une vision plus symétrique de ce plan complété :

Puisque les *courbes* qu'on trace comme ≪ droites ≫entre nos points ne sont qu'une aide pour représenter notre configuration, on peut choisir la façon de les courber d'où le second dessin :



§6.2. Les deux dessins ensembles :





§6.2. Ce plan à 7 points en version **Dobble**

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes. 

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes. 

- Or 55 n'est pas le carré d'un nombre, mais $55 = 49 + 6$.

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes.
- Or 55 n'est pas le carré d'un nombre, mais $55 = 49 + 6$.
  Le vrai DOBBLE s'obtient ainsi à partir d'un plan $\mathcal{P}_7$ avec $7 \times 7 = 49$ points, en *le complétant*, comme on vient de le faire pour le plan $\mathcal{P}_2$ en rajoutant des *points à l'infini*.

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes. 

- Or 55 n'est pas le carré d'un nombre, mais $55 = 49 + 6$.
  Le vrai DOBBLE s'obtient ainsi à partir d'un plan $\mathcal{P}_7$ avec $7 \times 7 = 49$ points, en *le complétant*, comme on vient de le faire pour le plan $\mathcal{P}_2$ en rajoutant des *points à l'infini*.
- Combien le plan $\mathcal{P}_7$ complété a-t-il de points à l'infini ?

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes. 

- Or 55 n'est pas le carré d'un nombre, mais $55 = 49 + 6$.
  Le vrai DOBBLE s'obtient ainsi à partir d'un plan $\mathcal{P}_7$ avec $7 \times 7 = 49$ points, en *le complétant*, comme on vient de le faire pour le plan $\mathcal{P}_2$ en rajoutant des *points à l'infini*.
- Combien le plan $\mathcal{P}_7$ complété a-t-il de points à l'infini ?
  8 car l'ensemble des points à l'infini forme un droite complétée.

§6.3. Le vrai DOBBLE

- Dobble a 55 cartes. 

- Or 55 n'est pas le carré d'un nombre, mais $55 = 49 + 6$.
  Le vrai DOBBLE s'obtient ainsi à partir d'un plan $\mathcal{P}_7$ avec $7 \times 7 = 49$ points, en *le complétant*, comme on vient de le faire pour le plan $\mathcal{P}_2$ en rajoutant des *points à l'infini*.
- Combien le plan $\mathcal{P}_7$ complété a-t-il de points à l'infini ?
  8 car l'ensemble des points à l'infini forme un droite complétée.
- Pourquoi y-a-en-t-il seulement 6 dans le jeu de DOBBLE ?

Peut-être pour jouer à trouver les deux cartes manquantes ?

§6.3. Le vrai DOBBLE

Peut-être pour jouer à trouver les deux cartes manquantes ?

§7 Une vie en dehors de DOBBLE ?

La construction de plans finis est utile (notamment) :

- Pour résoudre d'autres problèmes de "combinatoire" : si une ville a v habitants, faire g clubs d'habitants, qui ont tous le même nombre n de membres, de sorte que :
  • tous les habitants de la ville appartiennent exactement au même nombre r de clubs,
  • et pour chaque paire d'habitants, il y a exactement le même nombre s de clubs dont ils sont simultanément membres !

§7 Une vie en dehors de DOBBLE ?

La construction de plans finis est utile (notamment) :

- Pour résoudre d'autres problèmes de "combinatoire" : si une ville a v habitants, faire g clubs d'habitants, qui ont tous le même nombre n de membres, de sorte que :
  • tous les habitants de la ville appartiennent exactement au même nombre r de clubs,
  • et pour chaque paire d'habitants, il y a exactement le même nombre s de clubs dont ils sont simultanément membres !
  En anglais ce problème s'appelle le block design

§7 Une vie en dehors de DOBBLE ?

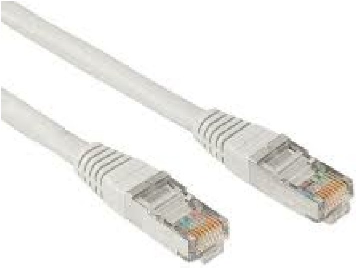
La construction de plans finis est utile (notamment) :

- Pour concevoir des systèmes de codes correcteurs d'erreurs : communication, gravure de CD,DVD.

§7 Une vie en dehors de DOBBLE ?

La construction de plans finis est utile (notamment) :

- Pour concevoir des systèmes de codes correcteurs d'erreurs : communication, gravure de CD,DVD.
  Idée : Même si le support est un peu abîmé, ou si le canal de communication est imparfait, la restitution de l'information est parfaite.



§8 Les codes correcteurs d'erreurs : la motivation

- **Données :** une information codée par une suite de 0 et de 1. Elle est sur un support (CD,DVD) qui peut s'abîmer, ou va transiter par des fils (internet) dans laquelle elle est peut être altérée.

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : la motivation

- **Données :** une information codée par une suite de 0 et de 1. Elle est sur un support (CD,DVD) qui peut s'abîmer, ou va transiter par des fils (internet) dans laquelle elle est peut être altérée.
- **Ce qu'on veut faire** : trouver un moyen, en rajoutant des éléments supplémentaires au message, pour contrer ces altérations.

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : la motivation

- **Données :** une information codée par une suite de 0 et de 1. Elle est sur un support (CD,DVD) qui peut s'abîmer, ou va transiter par des fils (internet) dans laquelle elle est peut être altérée.
- **Ce qu'on veut faire** : trouver un moyen, en rajoutant des éléments supplémentaires au message, pour contrer ces altérations.
- **La méthode la plus basique ?**

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : la motivation

- **Données :** une information codée par une suite de 0 et de 1. Elle est sur un support (CD,DVD) qui peut s'abîmer, ou va transiter par des fils (internet) dans laquelle elle est peut être altérée.
- **Ce qu'on veut faire** : trouver un moyen, en rajoutant des éléments supplémentaires au message, pour contrer ces altérations.
- **La méthode la plus basique ?**

On répète tout le message !

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :
  • si on veut transmettre 10110 on va transmettre 1100111100

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :
  • si on veut transmettre 10110 on va transmettre 1100111100
  Si on reçoit : 1101111100...

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :
  • si on veut transmettre 10110 on va transmettre 1100111100
  Si on reçoit : 1101111100...
  On saura qu'il y a une erreur de transmission sur le deuxième chiffre, mais on ne saura pas la vraie valeur.

  Ce code *détecte les erreurs*, mais il ne permet pas de les *corriger*.

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :
  • si on veut transmettre 10110 on va transmettre 1100111100
  Si on reçoit : 1101111100...
  On saura qu'il y a une erreur de transmission sur le deuxième chiffre, mais on ne saura pas la vraie valeur.

  Ce code *détecte les erreurs*, mais il ne permet pas de les *corriger*.

- En écrivant trois fois chaque bit
  Pour le message précédent, on transmet : 111 000 111 111 000
  S'il y a une erreur sur un bit et qu'on reçoit : 111 000 011 111 000

  Cette fois, on peut *détecter* et *corriger* l'erreur.

§8 Les codes correcteurs d'erreurs : le code de répétition pure.

- En écrivant deux fois chaque bit.
  Par exemple :
  • si on veut transmettre 10110 on va transmettre 1100111100
  Si on reçoit : 1101111100...
  On saura qu'il y a une erreur de transmission sur le deuxième chiffre, mais on ne saura pas la vraie valeur.

  Ce code *détecte les erreurs*, mais il ne permet pas de les *corriger*.

- En écrivant trois fois chaque bit
  Pour le message précédent, on transmet : 111 000 111 111 000
  S'il y a une erreur sur un bit et qu'on reçoit : 111 000 011 111 000

  Cette fois, on peut *détecter* et *corriger* l'erreur.

  Ceci, à condition qu'on soit sûr qu'il n'y en ait pas deux (hypothèse statistique).

§8 Les codes detecteurs d'erreurs : exemple du code de parité

- On code des mots sur huit bits, mais l'information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l'information 1011011 est portée par 10110111

§8 Les codes detecteurs d'erreurs : exemple du code de parité

- On code des mots sur huit bits, mais l'information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l'information 1011011 est portée par 10110111
- Que permet un tel codage ?

§8 Les codes detecteurs d'erreurs : exemple du code de parité

- On code des mots sur huit bits, mais l'information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l'information 1011011 est portée par 10110111
- Que permet un tel codage ?
- Détecter une erreur, mais pas la corriger. Exemple : le vieux ASCII. Exemple analogue : les clés des numéros de sécurité sociale (en base 10 cette fois).

§8 Les codes detecteurs d’erreurs : exemple du code de parité

- On code des mots sur huit bits, mais l’information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l’information 1011011 est portée par 10110111
- Que permet un tel codage ?
- Détecter une erreur, mais pas la corriger. Exemple : le vieux ASCII. Exemple analogue : les clés des numéros de sécurité sociale (en base 10 cette fois).
- Quel atout a ce codage par rapport à la répétition de chaque caractère ?

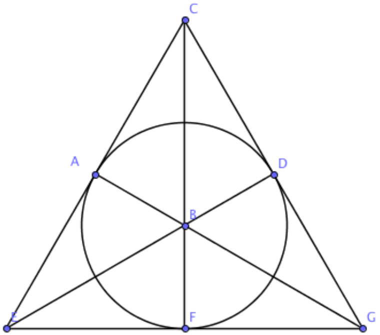
§8 Les codes detecteurs d'erreurs : exemple du code de parité

- On code des mots sur huit bits, mais l'information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l'information 1011011 est portée par 10110111
- Que permet un tel codage ?
- Détecter une erreur, mais pas la corriger. Exemple : le vieux ASCII. Exemple analogue : les clés des numéros de sécurité sociale (en base 10 cette fois).
- Quel atout a ce codage par rapport à la répétition de chaque caractère ?
- Moins de *perte de place* que la répétition, pour le même résultat si on sait qu'en moyenne on n'aura pas plus d'une erreur sur 8 caractères.

§8 Les codes detecteurs d'erreurs : exemple du code de parité

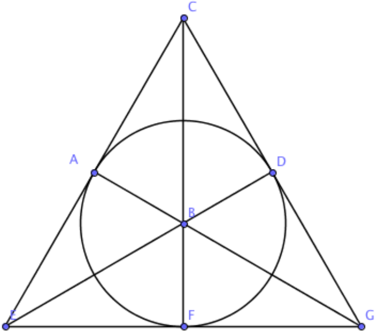
- On code des mots sur huit bits, mais l'information est portée par les 7 premiers, le huitième fait 0 si la somme des 7 premiers est *paire*, et 1 si elle est *impaire*.
  Par exemple : l'information 1011011 est portée par 10110111
- Que permet un tel codage ?
- Détecter une erreur, mais pas la corriger. Exemple : le vieux ASCII. Exemple analogue : les clés des numéros de sécurité sociale (en base 10 cette fois).
- Quel atout a ce codage par rapport à la répétition de chaque caractère ?
- Moins de *perte de place* que la répétition, pour le même résultat si on sait qu'en moyenne on n'aura pas plus d'une erreur sur 8 caractères.
- On dispose de $2^7 = 128$ mots codés sur 8 chiffres.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



Contemplons le encore :

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient

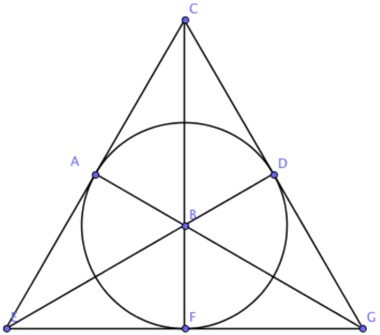


Contemplons le encore :

- 7 points et .

.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient

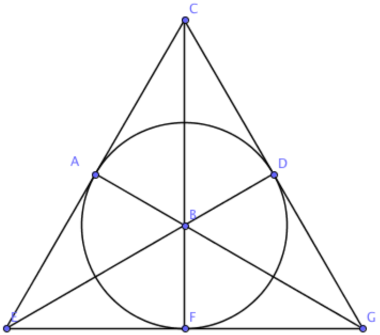


Contemplons le encore :

- 7 points et 7 droites.

.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient

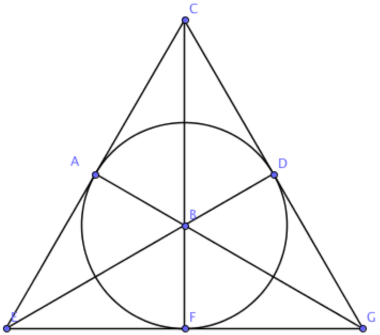


Contemplons le encore :

- 7 points et 7 droites.
- Chaque droite contient trois points et

.

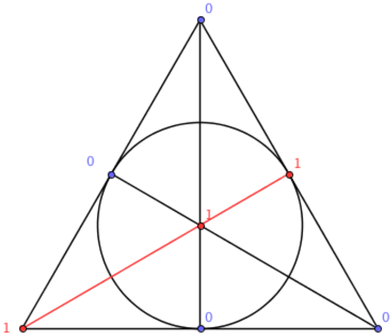
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient

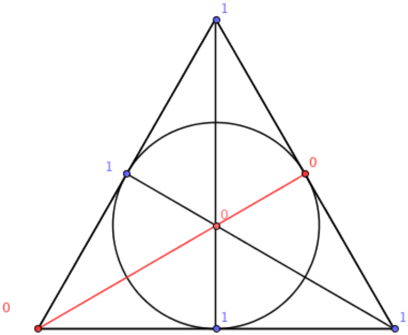


Contemplons le encore :

- 7 points et 7 droites.
- Chaque droite contient trois points et *chaque point est sur trois droites.*

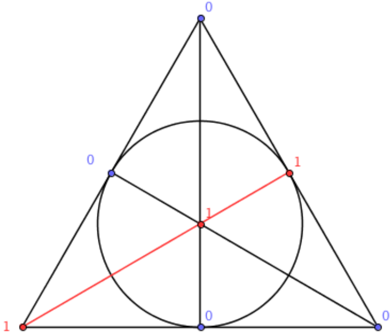
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient

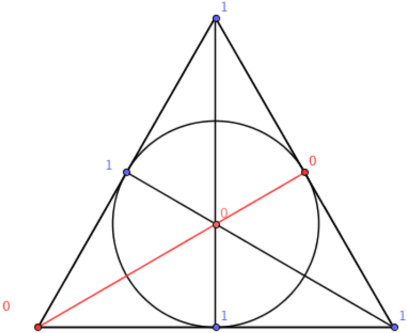




Définition d'un code associé : chacun des sept points porte un 0 ou un 1. Donc on aura des mots de 7 bits, mais pas *tous les mots de sept bits*. Les mots sont fabriqués à partir des droites.

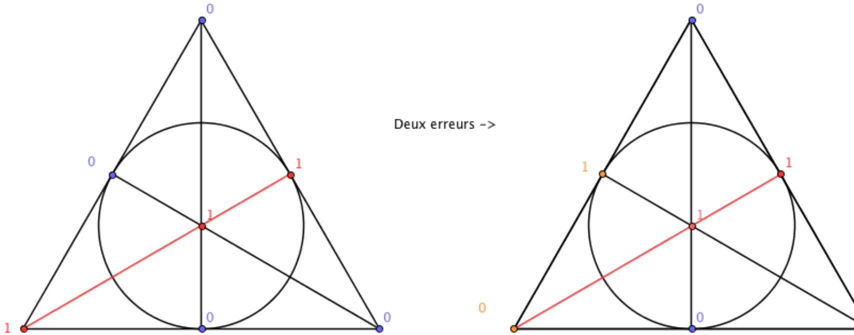
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient





1. Chacune des sept droites définit deux mots de codes : comme la droite rouge dans le dessin ci-dessus.
   A gauche (de gauche à droite et de bas en haut) : 1000110, à droite : 0111001.
2. On rajoute les deux mots 0000000 et 1111111.

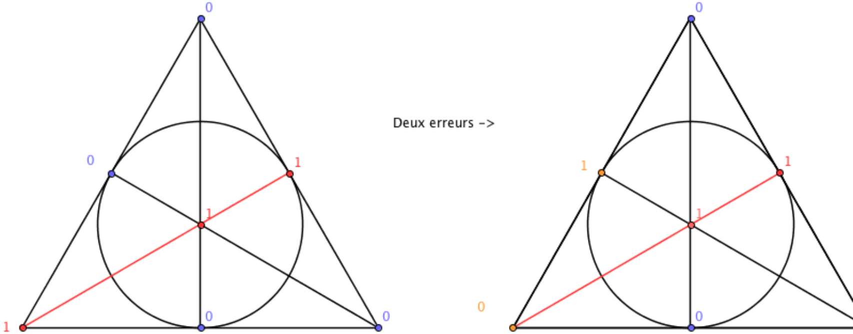
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



Au total, on dispose d'un code de 16 mots de 7 bits avec la propriété :

- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais un mot du code*.

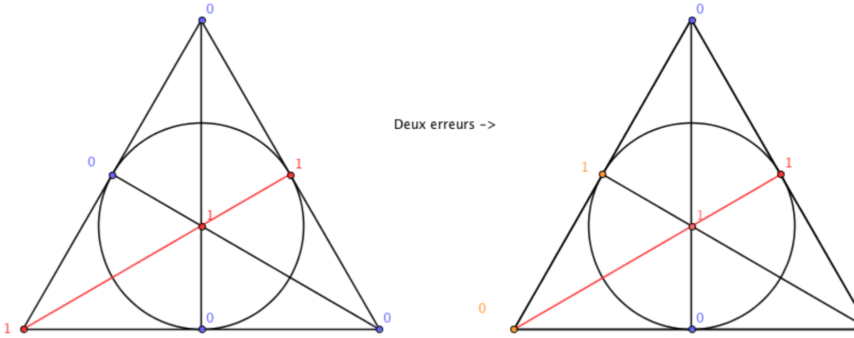
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



Au total, on dispose d'un code de 16 mots de 7 bits avec la propriété :

- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais un mot du code*.
- En effet les trois bits de même valeur (ici les trois 1) ne sont alors jamais alignés.

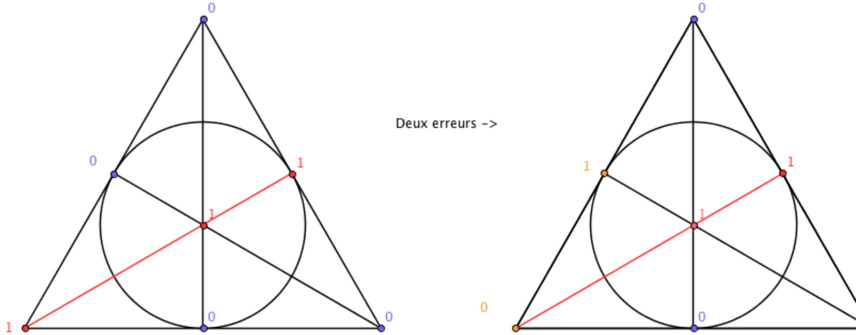
§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



Au total, on dispose d'un code de 16 mots de 7 bits avec la propriété :

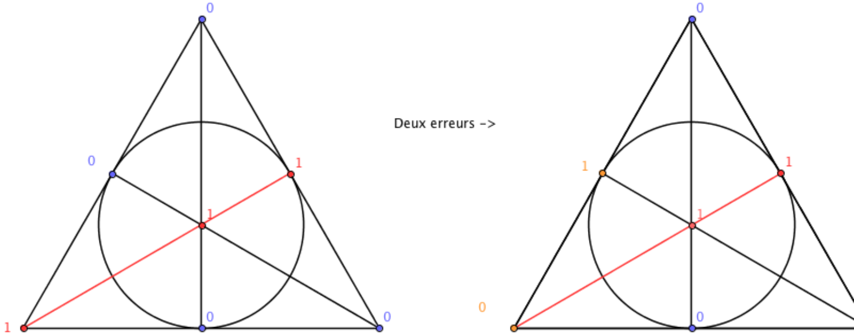
- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais un mot du code*.
- En effet les trois bits de même valeur (ici les trois 1) ne sont alors jamais alignés.
- La grande symétrie de la figure fait qu'un dessin suffit !

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



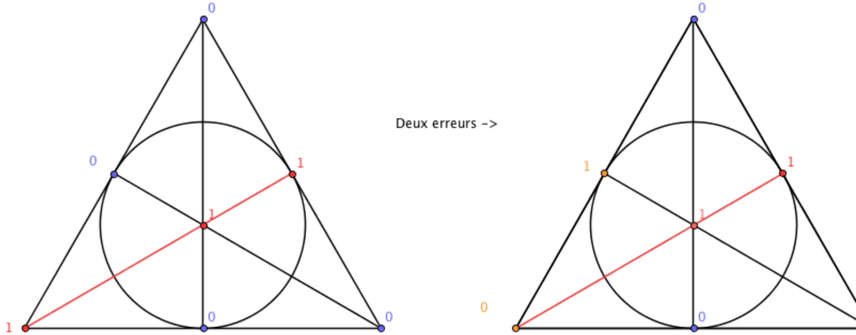
- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais* un mot du code.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



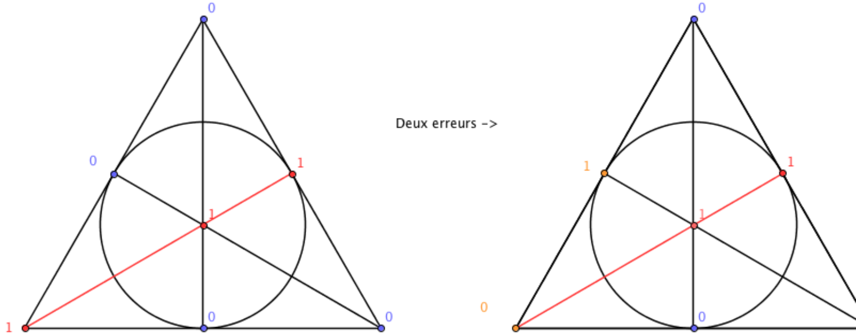
- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais* un mot du code.
  On dit que le code de Fano est détecteur de deux erreurs.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais* un mot du code.
  On dit que le code de Fano est détecteur de deux erreurs.
- Si on change un seul bit d'un mot du code, il n'y a qu'un seul mot de code assez proche du mot erroné.

§8 Les codes correcteurs : le plan de Fano revient



- Si on change un ou deux bits d'un mot du code (en orange), on n'obtient *jamais* un mot du code.
  On dit que le code de Fano est détecteur de deux erreurs.
- Si on change un seul bit d'un mot du code, il n'y a qu'un seul mot de code assez proche du mot erroné.
  On dit que le code de Fano est correcteur pour une *erreur.*

§9 Conclusion

La recherche mathématique en mots et en images

images des Maths