

Exercice 1 (L'équation fonctionnelle du logarithme, étendue à $\mathbb{R}^*$). Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2, f(xy) = f(x) + f(y).$$

N.B. – On pourra utiliser sans dém. le résultat du cours connu pour $\mathbb{R}^{++}$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x^2 - 1) + \ln(4) = \ln(4x - 1)$.

b) $\ln|x - 1| + \ln|x + 2| = \ln|4x^2 + 3x - 7|$.

Exercice 3. a) Résoudre $e^{2-2x} + \frac{e}{e^x} - 6 \leq 0$. b) Résoudre $10^{x^2+2x} = \frac{1}{10}$. c) Résoudre $x^{2\sqrt{2}} - 3x^{\sqrt{2}} + 2 = 0$.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Calculer la limite quand $n \rightarrow +\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Exercice 5. Calculer $f'(x)$ pour a) $f(x) = x \cdot 3^{x^2+1}$, b) $f(x) = (2x)^{x+5}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 8$, on a $n^{\sqrt{n+1}} > (n+1)^{\sqrt{n}}$ (*).

Exercice 7. a) Déterminer une valeur $x \in \mathbb{N}$ telle que $3^x + 4^x = 5^x$.

b) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $3^x + 4^x = 5^x$.

Exercice 8. Etudier $f : x \mapsto |\tan(x)|^{\cos(x)}$: ensemble de définition, monotonie, prolongements éventuels par continuité, dérivabilité aux points de prolongement.

Indication – pour l'étude du signe de la dérivée, on gagnera à écrire le facteur de $f'(x)$ dont on veut connaître le signe comme $\sin(x)$ fois un nouveau facteur, pour isoler le terme en $\ln$ et le faire disparaître en dérivant une nouvelle fois.