

DEVOIR SURVEILLÉ 2 : PARTIE I

Les calculatrices et autres appareils électroniques (téléphones etc.) sont interdits.

Exercice 1. On se propose ici d'étudier $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
- Montrer que f est dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{D}_f$ de f , calculer f' sur cet ensemble et en déduire les variations de f sur D_f .
- Etudier la dérivabilité de f en 0, et déterminer, si elle existe, la tangente au graphe Γ_f de f au point d'abscisse 0.
- Etude des branches infinies : généralités.

Dans cette question seulement f est une fonction quelconque définie sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On rappelle qu'une droite $D : y = ax + b$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$ ssi $f(x) - (ax + b) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (de même en remplaçant $+\infty$ par $-\infty$).

Montrer que si D est asymptote à Γ_f en $+\infty$ alors $f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$.

Remarque : Ceci permet de trouver la pente a d'une asymptote éventuelle. Ensuite, on étudie $f(x) - ax$ et si $f(x) - ax \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b \in \mathbb{R}$, on conclut que $D : y = ax + b$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$.

- Etude des branches infinies : retour à la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
Etudier les asymptotes éventuelles de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Donner une allure du graphe de f .

Exercice 2. Soit $f :]0, +\infty[\setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x-1}$.

- Montrer que f admet un prolongement par continuité au point 1 et au point 0

On notera encore $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction prolongée.

- Déterminer l'ensemble image $J = f([0, +\infty[)$ de f et montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans J .

c) Démontrer la généralisation suivante du théorème de la limite de la dérivée au cas des limites infinies (théorème au programme) :

Si $g \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(]a, b[, \mathbb{R})$ et $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \{-\infty, +\infty\}$

alors $\frac{g(x) - g(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

- Etudier la dérivabilité éventuelle de f au point 0 et l'éventuelle tangente au graphe Γ_f de f au point d'abscisse 0.

e) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et déterminer explicitement la valeur de $(f^{-1})'(2 \ln(2))$.

- Montrer que $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) < 1$.

Exercice 3 (Différentes propriétés liées à $f(x)/x$).

N.B. Les trois questions de cet exercice sont indépendantes

a) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Donner une C.N.S. sur f pour que $\frac{f(x)}{x}$ ait une limite finie en 0, et préciser dans ce cas la valeur de cette limite.

b) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell < 1$.

Montrer que f admet un point fixe $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

c) Soit $f \in \mathcal{F}(]0, +\infty[, \mathbb{R})$, et $g : x \mapsto f(x)/x$. On suppose que f est convexe et que f est sous-additive c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$. Montrer que g est décroissante.

PARTIE II

Problème. L'objectif de ce petit problème (pour les parties 1,2,3) est la détermination de l'ensemble \mathcal{S} de toutes les applications $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(P1) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ (on dit que f est sur-additive),

(P2) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(xy) = f(x).f(y)$ (on dit que f est multiplicative).

La partie 4 est une excursion vers le cas des fonctions *sous-additives*.

On notera que le problème est posé sans condition de régularité (continuité, dérivabilité...), *a priori*, sur les éléments de \mathcal{S} . En exercice de la planche, on avait trouvé toutes les fonctions dérivables de \mathbb{R}^{**} dans \mathbb{R}^{**} vérifiant (P2), mais ici on ne suppose pas f dérivable *a priori*.

Comme c'est le premier petit problème que je vous demande de rédiger en D.S, je vous rappelle une consigne. Citer toujours, avec leur numéro, les questions précédentes que vous utilisez pour répondre à une question donnée!

1) Des solutions au problème :

- a) Déterminer l'ensemble des fonctions constantes qui sont dans \mathcal{S} .
- b) Dans cette question seulement : α est un réel supérieur ou égal à 1 et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$.
Montrer que f vérifie les deux conditions (P1) et (P2).

2.) Des premières conditions nécessaires dans le cas non constant

On suppose dans toute la suite de cette question que $f \in \mathcal{S}$ et f n'est pas constante.

- a) Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
- b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, f(x^n) = f(x)^n$.
- c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ et $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$.
- d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.
- e) Montrer enfin que f est *croissante*.

3) Comment le résultat de croissance démontré ci-dessus va suppléer à la continuité

On suppose dans toute la suite de cette question que $f \in \mathcal{S}$ et f n'est pas constante.

- a) Montrer que $\ln(f(2))$ est bien défini et que $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$.
- b) Justifier que $\forall x > 0, \exists ! q \in \mathbb{N}, 2^q \leq x < 2^{q+1}$.
- c) On fixe ici un réel $x > 0$. Pour tout entier naturel p , on note q_p l'unique entier tel que $2^{q_p} \leq x^p < 2^{q_p+1}$.
 - (i) Déterminer la limite du rapport q_p/p quand $p \rightarrow +\infty$.
 - (ii) Démontrer l'encadrement :
$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p + 1}{p}.$$
 - (iii) En déduire que $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.
- d) Conclure qu'il existe un $\alpha \geq 1$ tel que : $\forall x \geq 0, f(x) = x^\alpha$.
- e) Conclure sur le problème de départ en décrivant exactement l'ensemble \mathcal{S} .

4) Excursions diverses :

a) On pourrait de même s'intéresser aux fonctions vérifiant :

(P1') $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ (on dit que f est sous-additive),

(P2) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(xy) = f(x).f(y)$ (on dit que f est multiplicative).

Conjecturer le résultat qu'on pourrait s'attendre à avoir.

b) Un lien entre fonction sous-additive et sur-additive est donné par le lemme suivant :

(Hyp) $f : I \rightarrow J$ est strictement croissante, bijective où I et J sont tous deux stables par addition.

Montrer que f est sous-additive sur I ssi f^{-1} est sur-additive sur J .

D.S. 2 : solutions

Solution 1 (i) Ensemble de déf. : deux conditions $x-1 \neq 0$ et $x^3/(x-1) \geq 0$. Avec un tableau de signes, on obtient : $x^3/(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Donc $D_f =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.

Par théorèmes généraux f est continue sur cet ensemble D_f .

(ii) Pas de réduction apparente de l'ensemble d'étude.

(iii) Variations : $x \mapsto f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout point x tel que $u(x) \neq 0$ donc tel que $x \neq 0$.

Donc pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$, où $u(x) = \frac{x^3}{x-1}$ et

$$u'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $u'(x)$ qui est celui de $(2x-3)$, d'où les variations : f est décroissante sur \mathbb{R}^- , décroissante sur $[1, \frac{3}{2}]$, et f est croissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Limites : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$ (point de continuité en fait). $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$ (aucune F.I.).

(iv) Ici, avant l'étude des branches infinies on voit aussi l'intérêt, pour le tracé de Γ_f d'une étude locale en 0 :

En effet, f est continue en 0, et $f(0) = 0$. Mais pour placer la tangente éventuelle en $(0, 0)$, on a besoin de savoir si f est dérivable ou pas en 0.

Or si on note, pour tout $x < 0$, $t_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, on a $t_0(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} = -\sqrt{\frac{x^3}{x^2(1-x)}}$

Donc $t_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et f est dérivable en 0 de dérivée 0. (Evidemment, tout ceci n'a de sens qu'à gauche de zéro.)

(v) Etude des branches infinies :

• En $+\infty$: $f(x)/x = \sqrt{x/(x-1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

On étudie $f(x) - x = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x} = \frac{x^2}{(x-1)(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x)} = \frac{x^2}{x^2(1 - \frac{1}{x})(1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}})}$.

Donc $f(x) - x = \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})(1 + \sqrt{\frac{x}{x-1}})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Conclusion : $D : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptote à Γ_f en $+\infty$.

• En 1 : asymptote verticale d'équation $y = 1$.

• En $-\infty$: $f(x)/x = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}}$. Attention ici, on prend $x < 0$ donc $x = -\sqrt{x^2}$.

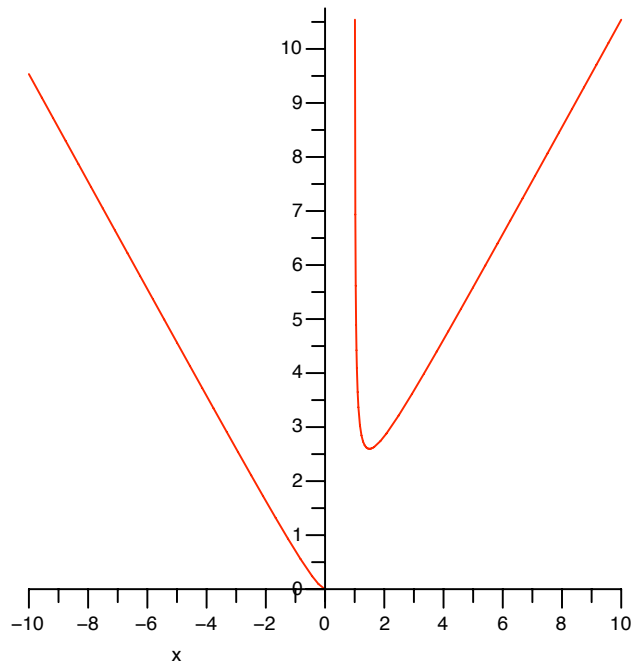
Donc $f(x)/x = -\sqrt{\frac{x}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.

On étudie $f(x) + x = \sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}} + x = \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}} - x} = \frac{x^2}{(x-1)(\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}} - x)}$

Là attention : au dénominateur, en sortant un x^2 , on a : $\sqrt{\frac{x^3}{(x-1)}} = -x \sqrt{\frac{x}{x-1}}$.

Donc $f(x) + x = \frac{1}{(1 - \frac{1}{x})(-\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}$.

Donc $D' : y = -x - \frac{1}{2}$ est asymptote en $-\infty$.



(vi) Enfin le graphe

Solution 2 a) (i) Au point 0 : par théorème de croissance comparée, $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{0}{-1} = 0$.

Donc en posant $f(0) = 0$, la fonction ainsi prolongée est continue en 0.

(ii) Au point 1 : on sait que $\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln'(1) = 1$.

Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$. Ainsi si on pose $f(1) = 1$ alors la fonction f ainsi définie est continue au point 1.

b) Notons $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$ et $I = I_1 \cup I_2$.

Pour $x \in I$, f est dérivable en x par théorèmes généraux, et $f'(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2}$.

On sait par concavité du \ln que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(x) \leq x-1$ car Γ_{\ln} est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 1.

Donc pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$. Mais on a besoin de mieux :

Lemme : pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$.

Preuve du lemme : on pourrait invoquer la *stricte concavité* du \ln mais cette notion n'est pas explicitement au programme. Donc on fait une preuve avec la fonction différence définie par $\varphi(x) = x-1-\ln(x)$, on calcule : $\varphi'(x) = 1-1/x$ qui change de signe en 1. On en déduit que φ est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc φ admet un minimum absolu strict en 1 et $\varphi(1) = 0$.

Donc pour tout $x \in I$, $\varphi(x) > 0$, ce qui démontre bien le lemme : $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$. □

Application du lemme : Comme f' est strictement positive sur $I_1 =]0, 1[$ et f est continue sur $[0, 1]$ on sait que f est strictement croissante sur l'intervalle fermé fermé $[0, 1]$.

Pour les mêmes raisons f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Comme les deux intervalles $[0, 1]$ et $]1, +\infty[$ s'intersectent en 1, on conclut que :

f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Enfin $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x-1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x \ln(x)}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

N.B. Sans le langage des équivalents, il suffit de factoriser par x au dénominateur.

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on sait donc par théorème de la bijection que f que :

(i) $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$,
(ii) f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

c) La preuve est *strictement identique* à celle du théorème de la limite de la dérivée faite en cours.

d) On sait que : $f'(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$ (ce n'est pas une forme indéterminée).

Donc le théorème du c), qui s'applique puisque $f \in \mathcal{C}([0, 1[, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}(]0, 1[, \mathbb{R})$ dit que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$.

Donc f n'est pas dérivable en 0 mais Γ_f admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

e) Comme f' ne s'annule pas sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, on sait, par théorème sur la dérivée d'une application réciproque, que f^{-1} est dérivable sur $f(]1, +\infty[) =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (mêmes arguments qu'au b) pour l'ensemble image).

En outre, $f(2) = 2 \ln(2)$, donc, toujours par ce théorème, $(f^{-1})'(2 \ln(2)) = \frac{1}{f'(2)}$.

Comme $f'(2) = 1 - \ln(2)$, on obtient : $(f^{-1})'(2 \ln(2)) = \frac{1}{1 - \ln(2)}$.

f) On pose $\forall x \in I$, $g(x) = f(x)f(1/x) - 1 = \frac{x \ln(x)}{x-1} \cdot \frac{(-\ln(x))}{x(\frac{1}{x}-1)} - 1 = \frac{x \ln^2(x)}{(x-1)^2} - 1$.

En réduisant au même dénominateur : $g(x) = \frac{x \ln^2(x) - (x-1)^2}{(x-1)^2}$.

Notons $h(x) = x \ln^2(x) - (x-1)^2$. On veut montrer que $\forall x \in I$, $h(x) < 0$.

Or $\forall x \in I$, $h'(x) = \ln^2(x) + 2 \ln(x) - 2(x-1)$, $h''(x) = \frac{2}{x} \ln(x) + \frac{2}{x} - 2 = \frac{2}{x}(\ln(x) + 1 - x)$.

Or on a montré au b) que pour tout $x \in I$, $\ln(x) + 1 - x < 0$.

Donc $h'' < 0$ sur $I =]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Or h est $\mathcal{D}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ (aucun pb. en 1). Donc h' est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Or $h'(1) = 0$ donc $h' > 0$ sur $]0, 1[$ et $h' < 0$ sur $]1, +\infty[$.

Donc h admet un maximum absolu strict en 1. Donc pour tout $x \in I$, $h(x) < h(1) = 0$.

Ce qui démontre que :

$$\forall x \in I, g(x) < 0, \text{ donc } \forall x \in I, f(x)f(1/x) - 1 < 0.$$

Solution 3 a) Comme $f(0) = 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Donc $\frac{f(x)}{x}$ a une limite finie quand $x \rightarrow 0$ ssi le taux de variation $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ a une limite finie quand $x \rightarrow 0$, donc ssi f est dérivable en 0.

Dans ce cas, cette limite est alors par déf. $f'(0)$.

b) On considère la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$. Comme f est continue, on sait que g est aussi continue.

Comme $f(0) \geq 0$, on sait que $g(0) \geq 0$.

D'autre part, comme $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell < 1$, par déf. de la limite, si on prend par exemple $\varepsilon = (1-\ell)/2$, de sorte que $\lambda := \ell + \varepsilon < 1$, on a un $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $f(x)/x \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, donc en particulier, $\forall x > A$, $0 \leq f(x)/x < \lambda < 1$.

Donc $\forall x > A$, $f(x) < x$ donc $g(x) = f(x) - x < 0$.

En particulier $g(A+1) < 0$ par exemple.

Comme g est continue, $g(0) \geq 0$ et $g(A+1) < 0$ par T.V.I., on a un $x_0 \in [0, A+1]$ tel que $g(x_0) = 0$ donc tel que $f(x_0) = x_0$.

Problème 1)

- a) Si f est constante égale à a , la condition (P2) donne $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$.
 Mais si f est la fonction constante égale à 1 alors f ne vérifie pas (P1) car 1 n'est pas supérieur à $1+1$.

En revanche, la fonction nulle vérifie (P1).

Donc il existe une et une seule fonction constante vérifiant (P1) et (P2) : la fonction nulle.

- b) Soit $\alpha \geq 1$ et $f : x \mapsto x^\alpha$.

• Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f(xy) = (xy)^\alpha \stackrel{(1)}{=} \exp(\alpha \ln(xy)) \stackrel{(2)}{=} \exp(\alpha \ln(x) + \alpha \ln(y)) \stackrel{(3)}{=} \exp(\alpha \ln(x)) \cdot \exp(\alpha \ln(y))$
 $x^\alpha \cdot y^\alpha = f(x) \cdot f(y)$.

Les égalités (1) et (4) sont donnés par déf. de la fonction $x \mapsto x^\alpha$ et (2) et (3) par prop. du \ln et de \exp .

Donc f vérifie (P1).

• Montrons que f vérifie (P2) :

Soit $y \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : x \mapsto (x+y)^\alpha - x^\alpha - y^\alpha$.

Alors $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \alpha(x+y)^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha-1} \geq 0$ car $y \geq 0$ et $u \mapsto u^{\alpha-1}$ est croissante sur \mathbb{R}^+ car $\alpha \geq 1$.

Donc φ est croissante sur \mathbb{R}^+ . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$.

Or $\varphi(0) = y^\alpha - y^\alpha = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) \geq 0$.

Ce résultat étant vrai pour tous les $y \in \mathbb{R}^+$, on a montré que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ donc f vérifie (P2).

2.

- a) Avec (P2) $f(1) = f(1)^2$ donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Mais si $f(1) = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x)f(1) = 0$ donc f serait constante égale à 0. Donc $f(1) = 1$.
 De même $f(0)^2 = f(0)$ et $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Mais si $f(0) = 1$ alors $f(x) = f(x)f(0)$ donne $1 = f(x)1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et f serait constante égale à 1. Donc $f(0) = 0$.

- b) Réc.

- c) Comme $x \cdot 1/x = 1$, on a $f(x)f(1/x) = f(1) = 1$ donc $f(x) \neq 0$ et $f(1/x) = 1/f(x)$.

- d) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $y = \sqrt{x}$. Alors $f(x) = f(y^2) = f(y)^2 \geq 0$. Comme en outre on a vu que si $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$, on conclut que pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) > 0$.

- e) Soit x et y dans \mathbb{R}^+ tels que $x \leq y$. Alors $y = (y-x) + x$, avec $y-x \in \mathbb{R}^+$ et par sur-additivité, $f(y) = f((y-x) + x) \geq f(y-x) + f(x)$ (1).

Comme on a montré à la question précédente que $f \geq 0$, on sait que $f(y-x) \geq 0$, et on déduit de (1) que $f(y) \geq f(x)$. Donc f est bien croissante. \square

- a) Avec le 2. c), comme $2 > 0$ on sait que $f(2) > 0$ et donc $\ln(f(2))$ est bien défini.

On sait que $f(1) = 1$ et par sur-additivité, $f(2) = f(1+1) \geq f(1) + f(1) = 2$.

Donc $\ln(f(2)) \geq \ln(2)$ par croissance du \ln .

- b) Soit $x > 0$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a l'équivalence : $2^q \leq x < 2^{q+1}$ (*) $\Leftrightarrow q \leq \log_2(x) < q+1$ (**) par stricte croissance de \log_2 .

Or on sait qu'il existe un unique $q \in \mathbb{N}$ vérifiant (**) qui est par déf. $\lfloor \log_2(x) \rfloor$.

- c) (i) Avec le résultat du b), on sait que $q_p = \lfloor \log_2(x^p) \rfloor = \lfloor p \log_2(x) \rfloor$.

$$\text{Donc } \frac{q_p}{p} = \frac{\lfloor p \log_2(x) \rfloor}{p}.$$

Par l'encadrement usuel $\forall u \in \mathbb{R}$, $u-1 < \lfloor u \rfloor \leq u$, on en déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \frac{p \log_2(x) - 1}{p} \leq \frac{q_p}{p} \leq \frac{p \log_2(x)}{p}.$$

Or par théorème des gendarmes, comme les deux termes de l'encadrement tendent, pour $p \rightarrow +\infty$, vers $\log_2(x)$, on conclut que :

$$\boxed{\frac{q_p}{p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \log_2(x)}.$$

- (ii) Comme $2^{q_p} \leq x^p \leq 2^{q_{p+1}}$, par croissance de f , on sait que $f(2^{q_p}) \leq f(x^p) \leq f(2^{q_{p+1}})$.
 Enfin par la prop. du 2. b), on en déduit l'inégalité $f(2)^{q_p} \leq f(x)^p \leq f(2)^{q_{p+1}}$.
 En prenant le \ln de cette inégalité : $q_p \ln(f(2)) \leq p \ln(f(x)) \leq (q_p + 1) \ln(f(2))$.
 Comme on a vu que $\ln(f(2)) \leq \ln(2) > 0$ (au a)), on en déduit en divisant par $\ln(f(2)) > 0$
 et par p l'inégalité

$$\frac{q_p}{p} \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \frac{q_p + 1}{p}.$$

- (iii) On a vu au c) (i) que $q_p/p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \log_2(x)$.

$$\text{De même } (q_p + 1)/p = q_p/p + 1/p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \log_2(x) + 0 = \log_2(x).$$

Donc par passage à la limite dans l'encadrement du (ii), (où le terme central est indépendant de p), on obtient :

$$\log_2(x) \leq \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} \leq \log_2(x),$$

$$\text{Autrement dit } \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(2))} = \log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}, \text{ ce qui se réécrit : } \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$$

- d) On a montré au c) que pour tout $x > 0$, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

$$\text{Ceci se réécrit } \ln(f(x)) = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \ln(x).$$

$$\text{En prenant l'exp. des deux membres de cette égalité, } f(x) = e^{\frac{\ln(f(2))}{\ln(2)} \ln(x)} = x^{\frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}}.$$

En posant $\alpha = \frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$, on sait par a) que $\alpha \geq 1$ et α est bien indépendant de x .

Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = x^\alpha$.

Comme on a vu au 2. a) que $f(0) = 0$ et que pour $\alpha > 0$ la fonction $x \mapsto x^\alpha$ se prolonge par continuité en 0, on peut donc écrire que :

$$\forall x \geq 0, f(x) = x^\alpha$$

où α est la constante $\frac{\ln(f(2))}{\ln(2)}$.

- e) Conclusion : le 2. et le 3. ont montré que si $f \in \mathcal{S}$ est non constante alors il existe un $\alpha \geq 1$ tel que $f : x \mapsto x^\alpha$.

Au 3.1. on a montré qu'inversement ces fonctions $f : x \mapsto x^\alpha$ sont dans \mathcal{S} .

Donc l'ensemble des fonctions non constante dans \mathcal{S} est exactement $\{f : x \mapsto x^\alpha, \alpha \in [1, +\infty[\}$.

Comme on a vu que \mathcal{S} contenait une et une seule fonction constante, la fonction nulle, on conclut que

$$\boxed{\mathcal{S} = \{f : x \mapsto x^\alpha, \alpha \in [1, +\infty[\} \cup \{0\}}$$

où 0 désigne la fonction nulle. □

4) a) On peut s'attendre à ce que les fonctions *non constantes* vérifiant ces nouveaux axiomes sont les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \leq 1$.

Le b) suivant ne suffit cependant pas à la prouver car on y fait une hyp. a priori de stricte monotonie... C'est bien cela vous laisse de quoi réfléchir à la maison...

4) b) Sens \Rightarrow On suppose que f est sous-additive sur I .

Soient y_1, y_2 dans J . On veut montrer que $f^{-1}(y_1 + y_2) \geq f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)$ (C).

$$\begin{aligned}(C) &\Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1 + y_2)) \geq f(f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)), \quad \text{car } f \text{ est stmt. croissante,} \\ &\Leftrightarrow y_1 + y_2 \geq f(f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2)), \\ &\Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + x_2), \quad \text{en posant } x_i = f^{-1}(y_i),\end{aligned}$$

et la dernière inéquation est vraie car f est sous-additive.

La preuve de l'autre sens est analogue.