

DM 13 : Autour de la Propriété des Valeurs Intermédiaires

Définition : Soit I un intervalle d'intérieur non vide et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f possède la P.V.I. si pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

1 Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie

Dans cette partie, on se propose de donner une démonstration différente du T.V.I. par rapport à celle vue en cours.

Le T.V.I. dit que si f est continue sur un intervalle I alors f possède la P.V.I.

Soient $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. La conclusion étant immédiate si $f(a) = f(b)$, on peut toujours supposer (quitte à remplacer f par $-f$) que $f(a) < f(b)$. Dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout entier n :

- si $f(\frac{a_n + b_n}{2}) < \lambda$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$,
- si $f(\frac{a_n + b_n}{2}) \geq \lambda$ alors $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \end{cases}$

a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

b) Conclure.

2 Applications du T.V.I.

2.1 Une variante des hypothèses pour l'existence de point fixes

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f([a, b]) \supset [a, b]$. Montrer que f admet un point fixe dans $[a, b]$.

2.2 Un résultat sur les intégrales : la formule de la moyenne

Soit $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})^2$, avec g positive sur $[a, b]$.

a) Soit $m = \min_{[a, b]} f$ et $M = \max_{[a, b]} f$. Justifier que $m \int_a^b g \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g$.

b) Montrer qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$.

2.3 Une variante plus compliquée d'un exercice de la planche

a) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $f(x_n + \frac{1}{n}) = f(x_n)$.

Indication – Le cas $n = 2$ est sur la planche. La fonction auxiliaire est la même.

b) Montrer que si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$ le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1 \right].$$

3 La contribution de G. Darboux sur des fonctions qui vérifient la P.V.I.

Suivant H. Lebesgue : " on avait pris en France l'habitude de définir une fonction continue comme celle qui ne peut passer d'une valeur à l'autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires, et l'on considérant cette définition comme équivalente à celle de Cauchy¹. Darboux a pu montrer que ces deux définitions de la continuité étaient fort différentes."

3.1 Un exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = \sin(1/x), \text{ si } x \neq 0. \end{cases}$$
 Montrer que f vérifie la P.V.I. mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

3.2 Une famille de fonctions qui vérifient la P.V.I. sans être continues

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide. On se propose de montrer que f' vérifie toujours la P.V.I. même si f' n'est pas continue.

Soit donc $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ et $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. On considère la fonction g définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$.

- Justifier qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$.
- Montrer que $c \neq a$ et $c \neq b$.
- Conclure.

3.3 Une condition supplémentaire, qu'on rajoute à la P.V.I. pour obtenir la continuité ¶

- Définitions générales (introduction à la topologie de $\mathbb{R}$:**

Déf. 1 un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *ouvert* dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout $a \in A$ il existe un $\varepsilon_a > 0$ tel que $]a - \varepsilon_a, a + \varepsilon_a[\subset A$.

Remarque 1 : le vide est ouvert.

Remarque 2 : avec la déf. déjà connue de l'intérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, A est ouvert si, et seulement si, A est égal à son intérieur.

Déf. 2 un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est dit *fermé* dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\mathbb{R} \setminus F$ est un ouvert.

Exemples :

(i) montrer que les intervalles ouverts $]a, b[,]a, +\infty[,]-\infty, b[$ sont des ouverts, et que les intervalles $[a, b], [a, +\infty[,]-\infty, b]$ sont fermés.

(ii) montrer que $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

- Caractérisation séquentielle des fermés de $\mathbb{R}$:**

Montrer qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$ est fermé si, et seulement si, pour toute suite $(a_n) \in F^{\mathbb{N}}$, si (a_n) converge vers une limite l , alors $l \in F$.

- Version relative de la définition de fermé et prop. des fonctions continues ;**

Déf. Si $I \subset \mathbb{R}$ on dira qu'un sous-ensemble F de I est *fermé dans I* , si et seulement si, pour toute suite $(a_n) \in F^{\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $l \in I$, on a $l \in F$.

Question : montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *continue* et si $y \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble $A_f(y) = \{x \in I, f(x) = y\}$ des antécédents de y par f est un *fermé* de I .

- Une réciproque du T.V.I. avec une hyp. en plus**

Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

- f a la P.V.I.,
 - pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble $A_f(y)$ des antécédents de y par f est un *fermé* de I .
- Montrer que f est continue sur I .

1. c'est-à-dire à la vraie définition $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pour tout x_0 .